复分析期末复习

统计 91 董晟渤

2021 年 6 月 23 日

感谢张博闻同学的指导.

博闻学长, 我的榜样!

目录

1 复习课

1.1 Cauchy-Riemann 方程

设 $f = u + vi \in H(\Omega)$, 则 u 和 v 满足方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

若记

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right), \end{cases}$$

则有 $\dfrac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

1.2 积分的计算

设 $f \in H(\Omega)$, 则对 $a \in \Omega$, 有 *Cauchy* 积分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - a}, \quad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

除此之外, 积分的计算还可以使用留数定理. 若 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = \lambda$, 则有

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\lambda.$$

例题 1. 计算 $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z-3)^5(z+4)^8}$.

解答. 当 $|z| \le 2$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}z}{(z-3)^5(z+4)^8}$ 是解析函数, 这令人非常喜悦, 因此

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z-3)^5(z+4)^8} = 0.$$

例题 2. 计算 $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z^6+1}\mathrm{d}z$.

解答. 注意到 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z(z^2+1)}{z^6+1}=0$, 因此

$$\int_{|z|=2}\frac{z^2+1}{z^6+1}\mathrm{d}z=0.$$

例题 3. 计算 $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z^2+1}{(z-1)^3(z-3)}\mathrm{d}z$.

解答. 计算得

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2}\frac{z^2+1}{(z-1)^3(z-3)}\mathrm{d}z&=\int_{|z|=2}\frac{\left(\dfrac{z^2+1}{z-3}\right)}{(z-1)^3}\mathrm{d}z\\&=\frac{2\pi i}{2!}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^2\left(\frac{z^2+1}{z-3}\right)\bigg|_{z=1}\\&=-\frac{5}{2}\pi i.\end{aligned}$$

最后一步算错就不是复变函数的问题了.

另外, 若记原积分为 I, 设 C_R 为充分大的圆周, 则

$$\begin{aligned}\int_{C_R}\frac{z^2+1}{(z-1)^3(z-3)}\mathrm{d}z-I&=2\pi i\cdot\left(\frac{z^2+1}{(z-1)^3}\right)\bigg|_{z=3}\\&=\frac{5}{2}\pi i,\end{aligned}$$

又根据 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z(z^2+1)}{(z-1)^3(z-3)}=0$, 因此 $\displaystyle\int_{C_R}\frac{z^2+1}{(z-1)^3(z-3)}\mathrm{d}z=0$, 据此得到 $I=-\dfrac{5}{2}\pi i$.

例题 4. 计算 $\displaystyle\int_{|z|=1}\mathrm{e}^{\bar z}\mathrm{d}x$.

解答. 设 $z=x+yi$, 则 $x=\dfrac{1}{2}(z+\bar z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, 代入得

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1}\mathrm{e}^{\bar z}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z-\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z^2}\mathrm{d}z\\&=\pi i,\end{aligned}$$

其中根据 $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2z^2}+\cdots$ 可以计算得到

$$\int_{|z|=1}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z=2\pi i,\quad\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z^2}\mathrm{d}z=0.$$

另外, 若记原积分为 I, 则

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \int_{|z|=1} \mathrm{e}^{z}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \mathrm{e}^{z}\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^{z}}{z^2}\mathrm{d}z \\ &= -\pi i,\end{aligned}$$

其中 $\displaystyle\int_{|z|=1} \mathrm{e}^{z}\mathrm{d}z = 0$, $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^{z}}{z^2}\mathrm{d}z = -2\pi i$, 从而 $I = \pi i$.

1.3 求解析函数

如果 $f(z) \in H(\Omega)$, 则 $z^n f(z) \in H(\Omega)$.

例题 5. 是否存在 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$, 使得 $f|_{\partial D} = \mathrm{e}^{-y^2}$?

解答. 通常这么问都是不存在. 设 $z = x + yi$, 则 $y = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$,

$$f|_{\partial D}(z) = \exp\left\{\frac{1}{4}\left(z^2 + \frac{1}{z^2} - 2\right)\right\}.$$

此时 $f(z)$ 存在奇点, 因此我们猜不存在. 接下来通过 Cauchy 积分公式来说明.

若 $f(z)$ 是解析函数, 则 $z\exp\left\{-\dfrac{1}{4}z^2\right\}f(z)$ 也是解析函数, 因此

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\partial D} z\exp\left\{-\frac{1}{4}z^2\right\}f(z)\mathrm{d}z \\ &= \mathrm{e}^{-2}\cdot\int_{\partial D} z\exp\left\{\frac{1}{4z^2}\right\}\mathrm{d}z \\ &= \mathrm{e}^{-2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\pi i \\ &\neq 0,\end{aligned}$$

矛盾, 因此不存在满足条件的解析函数.

例题 6. 设 $f(z)$ 是亚纯函数, 且

$$|\mathrm{e}^{y}(z+1)f(z)| \leq |z|^2,$$

求 $f(z)$.

解答. 注意到 $|e^{-iz}| = |e^y|$, 因此令

$$F(z) = \frac{(z+1)f(z)}{z^2 e^{iz}},$$

则 $|F(z)| \le 1$, 接下来只要说明 $F(z)$ 是解析函数即可.

设 a 是 $F(z)$ 的任一奇点, 则根据 $|F(z)| \le 1$ 知 a 是可去奇点. 从而可以在 a 处补充定义, 得到解析函数 $\hat{F}(z)$. 由 $\hat{F}(z) \in H(\mathbb{C})$ 及 $\hat{F}(z)$ 有界, 根据 Liouville 定理知 $\hat{F}(x) \equiv c$, 其中 $c \in \mathbb{C}$ 且 $|c| \le 1$. 从而

$$f(z) = \frac{cz^2 e^{iz}}{z+1}, \quad \text{其中 } c \in \mathbb{C} \text{ 且 } |c| \le 1.$$

另外, 若给定的不等式形如

$$|F(z)| \le C(1 + |z|^\alpha),$$

其中 $F(z) \in H(\mathbb{C})$, 则根据 Cauchy 不等式得

$$|F^{(n)}(0)| \le Cn! \cdot \frac{1+R^\alpha}{R^n}, \quad \text{其中 } R > 0,$$

从而 $F(z)$ 至多是 $[\alpha]$ 次多项式.

1.4 Laurent 级数

例题 7. 将函数 $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)(z-2)}$ 在下列圆环域展开成 Laurent 级数.
(1) $0 < |z-1| < 1$; (2) $2 < |z| < \infty$.

解答. 注意到 $\dfrac{z+1}{(z-1)(z-2)} = -\dfrac{2}{z-1} + \dfrac{3}{z-2}$, 再展开即可.

2　2019 年样卷

题目 1.　设 $f=u+vi$ 在区域 D 内解析, 且满足

$$u-v=2xy+y^2+ax^2,$$

求 a 与 $f(z)$.

解答.　首先, 根据 $u-v$ 是调和函数知

$$\Delta(2xy+y^2+ax^2)=2+2a,$$

解得 $a=-1$. 接下来, 令 $g=(1+i)f=(u-v)+(u+v)i$, 则 g 在区域 D 内解析, 且

$$\mathrm{Re} g=u-v=2xy+y^2-x^2.$$

令

$$F(z)=2(u-v)\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)+C_1=-(1+i)z^2+C_1,$$

则 $F(z)$ 满足条件, 从而

$$f(z)=-z^2+C,$$

其中 $C\in\mathbb{C}$.

题目 1 的注记.　若已知函数 $f=u+iv$ 在 z_0 处解析, 其实部 $u(x,y)$, 则有

$$f(z)=2u\left(\frac{z+z_0}{2},\frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right)+c,$$

其中 $c\in\mathbb{C}$.

题目 2.　利用 Cauchy 积分公式或留数理论, 计算以下积分.

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1}\sin z\mathrm{d}y$;　(2) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z^2+2}{z^4(z-3)}\mathrm{d}z$;

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}(0<p<1)$;　(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x$;　(6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$.

解答. (1) 设 $z=x+yi$, 则 $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=\dfrac{1}{2i}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$, $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2i}\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)\mathrm{d}z$, 代入得

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1}\sin z\mathrm{d}y&=\frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\frac{(z^2+1)\sin z}{z^2}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2i}\cdot 2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{(z^2+1)\sin z}{z^2}\\&=\pi.\end{aligned}$$

(2) 计算得

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2}\frac{z^2+2}{z^4(z-3)}\mathrm{d}z&=2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z^2+2}{z^4(z-3)}\\&=-\frac{22}{81}\pi i.\end{aligned}$$

(3) 设 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$, 则 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$, 代入得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}&=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(1-pz)(z-p)}\\&=\frac{1}{i}\cdot 2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=p}\frac{1}{(1-pz)(z-p)}\\&=\frac{2\pi}{1-p^2}.\end{aligned}$$

(4) 由 $z^4+1=0$ 解得 $z_1=\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\pi i}$, $z_2=\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi i}$, $z_3=\mathrm{e}^{\frac{5}{4}\pi i}$, $z_4=\mathrm{e}^{\frac{7}{4}\pi i}$, 从而

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}&=2\pi i\cdot\left(\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{1}{z^4+1}+\operatorname*{Res}_{z=z_2}\frac{1}{z^4+1}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.\end{aligned}$$

(5) 注意到 $2\sin^2x=1-\cos 2x$, 从而

$$\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}-\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

其中 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$. 再考虑积分

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2xi}}{1+x^2}\mathrm{d}x&=2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{\mathrm{e}^{2zi}}{1+z^2}\\&=\pi\mathrm{e}^{-2},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2xi}}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-2},\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2}).$$

(6) 由 $x^2+1=0$ 解得 $x_1=i$, $x_2=-i$; 由 $x^2+4=0$ 解得 $x_3=2i, x_4=-2i$, 从而

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x &= 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}+\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\right)\\ &= \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

题目 3. 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ 在下列圆环域展开成 Laurent 级数.
(1) $0<|z-1|<1$; (2) $2<|z|<\infty$.

解答. (1) 注意到

$$\begin{aligned}\frac{z}{z-2} &= 1-\frac{2}{1-(z-1)}\\ &= 1-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n,\end{aligned}$$

因此

$$f(z) = -\frac{1}{z-1}-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n.$$

(2) 计算得

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{z}{(z-1)(z-2)}\\ &= \frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}-\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^n}.\end{aligned}$$

题目 3 的注记. 第二题有一种错误的做法是

$$
\begin{aligned}
f(z) &= z\cdot\frac{1}{1-z}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}\\
&= z\cdot\sum_{n=0}^{\infty}z^n\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)z^n.
\end{aligned}
$$

这是因为该级数在 $2<|z|<\infty$ 时不收敛.

题目 4. 判断下列函数的奇点类型, 并求留数.

(1) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4}+\dfrac{\mathrm{e}^{2\pi z}-1}{(z^2+1)^2}$; (2) $f(z)=\dfrac{\cos\frac{1}{z}}{(z-1)^2}$.

解答. (1) $z=0$ 是 $f(z)$ 的 3 阶极点, 且

$$\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=-\frac{1}{6};$$

$z=\pm i$ 是 $f(z)$ 的 1 阶极点, 且

$$\operatorname*{Res}_{z=i}f(z)=\operatorname*{Res}_{z=-i}f(z)=-\frac{\pi}{2}.$$

(2) $z=1$ 是 $f(z)$ 的 2 阶极点, 且

$$\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=\sin 1;$$

$z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点, 这是因为 $z=0$ 是 $\cos\frac{1}{z}$ 的本性奇点. 由 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z\cos\frac{1}{z}}{(z-1)^2}=0$ 得

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=0,$$

又 $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}f(z)+\operatorname*{Res}\limits_{z=1}f(z)+\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}f(z)=0$, 解得

$$\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=-\sin 1.$$

题目 4 的注记. 若 $f(z)$ 有 n 阶极点 z_0, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n-1}(z-z_0)^nf(z).$$

同时, 设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是 $f(z)$ 的所有奇点, 则有

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = 0,$$

由此可以解得本性奇点的留数.

题目 5. 求 $D = \left\{z : |z| < 1, 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}\right\}$ 到单位圆盘 $\{w : |w| < 1\}$ 的共形映射.

解答. 令 $z_1 = f_1(z) = z^3$, 则 f_1 将 D 映为上半单位圆盘 $D_1 = \{z_1 : |z_1| < 1, \mathrm{Re}z > 0\}$. 再令 $z_2 = f_2(z_1) = \dfrac{1+z_1}{1-z_1}$, 则 f_2 将 D_1 映为角形区域 $D_2 = \{z_2 : \mathrm{Re}z_2 > 0, \mathrm{Im}z_2 > 0\}$. 再令 $z_3 = f_3(z_2) = (z_2)^2$, 则 f_3 将 D_2 映为上半平面 $H = \{z_3 : \mathrm{Im}z > 0\}$. 最后令 $w = f_4(z_3) = \dfrac{z_3 - i}{z_3 + i}$, 则 f_4 把 H 映为单位圆盘 $\{w : |w| < 1\}$. 从而令

$$g = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1,$$

则 g 将 D 映为单位圆盘.

题目 5 的注记. 众所周知, $w = f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ 是从上半平面到单位圆盘的共形映射.

题目 6. (1) 求一共形映射 $z = T(w)$, 它将右半平面 $H = \{w : \mathrm{Re}w > 0\}$ 映为单位圆盘 $D = \{z : |z| < 1\}$;

(2) 设 $f : D \to H$ 为解析映射, 且满足 $f(0) = 1$. 证明 $\left|\dfrac{f(z)-1}{f(z)+1}\right| \le |z|$;

(3) 证明 $\left|\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(0)\right| \le 2$.

解答. (1) 只需令

$$z = T(w) = \frac{iw - i}{iw + i} = \frac{w-1}{w+1}.$$

(2) $f \circ T : D \to D$ 为从单位圆盘到单位圆盘的共形映射, 根据 Schwarz 引理得

$$|T \circ f(z)| = \left|\frac{f(z)-1}{f(z)+1}\right| \le |z|.$$

(3) 根据 Schwarz 引理得

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{f(z)-1}{f(z)+1}\right)\bigg|_{z=0}\right| = \left|\frac{2f'(0)}{(f(0)+1)^2}\right| \le 1,$$

又 $f(0) = 1$, 从而解得 $|f'(0)| \le 2$.

题目 7. (1) 求多项式 $p(z) = z^4 + 7z - 1$ 在单位圆盘内的零点个数;
(2) 求 $p(z)$ 在 $1 < |z| < 2$ 内的零点个数.

解答. (1) 当 $|z| = 1$ 时, $|z^4 - 1| \le |z|^4 + 1 = 2 < 7 = |7z|$, 因此

$$N(p(z), |z| < 1) = N(7z, |z| < 1) = 1,$$

也即 $p(z)$ 在单位圆盘内有 1 个零点.
(2) 当 $|z| = 2$ 时, $|7z - 1| \le 7|z| + 1 = 15 \le 16 = |z^4|$, 因此

$$N(p(z), |z| < 2) = N(z^4, |z| < 2) = 4,$$

也即 $p(z)$ 在 $|z| < 2$ 内有 4 个零点. 因此 $p(z)$ 在 $1 < |z| < 2$ 内有 3 个零点.

题目 8. 是否存在 $f(z)$, 在单位圆盘内解析, 在闭单位圆盘内连续, 且满足: 当 $|z| = 1, z = x + yi$ 时, 有 $f(z) = x^2 - y^2 + 2yi$? 若存在请求出 $f(z)$; 若不存在请证明.

解答. 由 $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$, 代入得

$$f(z) = \frac{1}{2}z^2 + z - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2}, \quad |z| = 1.$$

假设 $f(z)$ 是解析函数, 则有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z \\ &= -2\pi i, \end{aligned}$$

矛盾. 从而不存在 $f(z)$.

题目 9. (1) 设 $D = \{z : |z| < 1\}$ 为单位圆盘, 求下列边值问题的解:

$$\Delta u = 0, \quad z \in D, \quad u|_{\partial D} = 5x^2 + y^2;$$

(2) 设 $u(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数调和函数, 证明 $u(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$, 其中 $u(\mathbb{C})$ 为 u 的象集, $\mathbb{R}$ 为实数集.

解答. (1) 令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, 则当 $r = 1$ 时,

$$u|_{\partial D} = 5\cos^2\theta + \sin^2\theta = 2\cos 2\theta + 3.$$

则可令

$$u(r\mathrm{e}^{i\theta}) = 2r^2\cos 2\theta + 3.$$

(2) 由 u 是非常数调和函数知 $u(\mathbb{C})$ 是 $\mathbb{R}$ 中的区间, 只需证明 $u(\mathbb{C})$ 没有上下界. 假设 $u(z) \le M$, 则存在解析函数 $f(z)$, 使得 $\mathrm{Re}f(z) = u(z)$. 记 $F(z) = \mathrm{e}^{f(z)}$, 则 $F(z)$ 是解析函数, 且

$$|F(z)| = |\mathrm{e}^{f(z)}| = |\mathrm{e}^{u(z)}| \le \mathrm{e}^M,$$

根据 Liouville 定理知 $F(z)$ 是常函数, 从而 $f(z)$ 也是常函数, $u(z)$ 是常函数, 矛盾. 同理也可以证明 $u(\mathbb{C})$ 没有下界, 故 $u(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$.

题目 10. 设复平面上的亚纯函数 $f(z)$ 满足

$$|\mathrm{e}^y(z+1)f(z)| \le |z|, \quad z = x + yi,$$

求 $f(z)$.

解答. 记

$$F(z) = \frac{\mathrm{e}^{-iz}(z+1)f(z)}{z},$$

则 $|F(z)| \le 1$, 并且 $F(z)$ 的奇点都是可去奇点, 从而由 Liouville 定理知

$$F(z) \equiv c, \quad 其中\ |c| \le 1.$$

代入解得

$$f(z) = \frac{cz\mathrm{e}^{iz}}{z+1}, \quad 其中\ |c| \le 1.$$

3　2018 年样卷 (选做)

考虑到大部分题目都是类似的, 在此只选择部分稍有不同的题目解答.

题目 1. 记 $I=[0,\infty)$, $D=\mathbb{C}-I$.
(1) 求一共形映射 $w=f(z)$, 它将 $D=\mathbb{C}-I$ 映射成单位圆盘;
(2) 证明从 $\mathbb{C}$ 到 D 的解析映射为常函数;
(3) 是否存在从 D 到 $\mathbb{C}$ 的解析满射?

解答. (1) 首先令 $z_1=f_1(z)=\sqrt{z}$, 则 f 把 D 映为上半平面, 接下来只要令 $z_2=f_2(z_1)=\dfrac{z_1-i}{z_1+i}$ 即可. 因此

$$w=f(z)=\frac{\sqrt{z}-i}{\sqrt{z}+i}.$$

(2) 设 $g:\mathbb{C}\to D$ 为解析映射, 则 $g\circ f$ 为 C 到单位圆盘的解析映射, 由 Liouville 定理知 $g\circ f=c$, 因此 $g=c$.
(3) 令 $f(z)=(z+1)^2$, 则 $g:D\to\mathbb{C}$ 为解析满射.

题目 2. (1) 求多项式 $p(z)=2z^5+6z-1$ 在单位圆盘内的零点个数;
(2) 求 $p(z)$ 在 $1<|z|<2$ 内的零点个数;
(3) 说明在 $1<|z|<2$ 内零点均为虚数.

解答. (1) 当 $|z|=1$ 时, $|z^5-1|\le 2<6=|6z|$, 因此

$$N(p(z),|z|\le 1)=N(6z,|z|\le 1)=1.$$

因此 $p(z)$ 在 $|z|<1$ 内的零点个数是 1.
(2) 当 $|z|=2$ 时, $|6z-1|\le 13<32=|2z^5|$, 因此

$$N(p(z),|z|\le 2)=N(z^5,|z|\le 2)=5,$$

因此 $p(z)$ 在 $1<|z|<2$ 内的零点个数是 4.
(3) 设 $f(x)=2x^5+6x-1, x\in\mathbb{R}$, 则 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 单调递增. 由 $f(0)=-1<0, f(1)=7>0$ 知, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有一个零点. 由单调性知 $f(x)$ 在 $(-2,-1)\cup(1,2)$ 内没有零点, 因此 $p(z)$ 在 $1<|z|<2$ 内零点均为虚数.

4 2017 年样卷

题目 1. 设 $f = u + vi$ 在区域 D 内解析, 且满足以下条件之一:
(1) $u + v = x + x^2 - y^2$;
(2) $xu - yv = ax^2 - y^2 + by^3$,
求 $f(z)$.

解答. (1) 令 $g = (1-i)(u+vi) = u + v + (v-u)i$, 则 g 在区域 D 内解析, 且

$$\mathrm{Re}g = u + v = x + x^2 - y^2.$$

令

$$g(z) = 2(u+v)\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + c = z^2 + c_1,$$

从而

$$f(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) z^2 + c,$$

其中 $c \in \mathbb{C}$.
(2) 令 $h = (x+yi)(u+vi) = (xu - yv) + (xv + yu)i$, 则 h 在区域 D 内解析, 且

$$\mathrm{Re}h = xu - yv = ax^2 - y^2 + by^3.$$

根据 $\mathrm{Re}h$ 是调和函数知

$$\Delta \mathrm{Re}h = 2a - 2 + 6by = 0,$$

解得 $a = 1, b = 0$, 再令

$$h(z) = 2(xu - yv)\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + c_1 = \frac{1}{2}z^2 + c,$$

从而

$$f(z) = \frac{1}{2}z + \frac{c}{z},$$

其中 $c \in \mathbb{C}$.

题目 1 的注记. 若已知函数 $f = u + iv$ 在 z_0 处解析, 其实部 $u(x, y)$, 则有

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + z_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) + c,$$

其中 $c \in \mathbb{C}$.

题目 2. 利用 Cauchy 积分公式或留数理论, 计算以下积分.

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1} \mathrm{e}^z \mathrm{d}x,\quad \int_{|z|=1} z\mathrm{e}^z \mathrm{d}y,\quad \int_{|z|=1} \bar{z}^2 z\mathrm{e}^z \mathrm{d}\bar{z}$;

(2) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^2+5}{z(z+1)}\mathrm{d}z,\quad \int_{|z|=2} \frac{z+1}{(z^6+1)(z+3)}\mathrm{d}z$;

(3) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^4+1}{z^2(z^3+1)}\mathrm{d}z$; (4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cos x}\mathrm{d}x(|\varepsilon|<1)$;

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; (6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解答. (1) (i) 设 $z=x+yi$, 则 $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{z^2}\right)\mathrm{d}z$, 代入得

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \mathrm{e}^z \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)\mathrm{e}^z}{z^2}\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{(z^2-1)\mathrm{e}^z}{z^2}\\ &= -\pi i.\end{aligned}$$

(ii) 设 $z=x+yi$, 则 $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=\dfrac{1}{2i}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$, $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2i}\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)\mathrm{d}z$, 代入得

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} z\mathrm{e}^z \mathrm{d}y &= \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)z\mathrm{e}^z}{z^2}\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2i}\cdot 2\pi i\cdot \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{(z^2+1)z\mathrm{e}^z}{z^2}\\ &= \pi.\end{aligned}$$

(iii) $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$, $\mathrm{d}\bar{z}=-\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2}$, 代入得

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \bar{z}^2 z\mathrm{e}^z \mathrm{d}\bar{z} &= -\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{z^3}\mathrm{d}z\\ &= -2\pi i\cdot \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\mathrm{e}^z}{z^3}\\ &= -\pi i.\end{aligned}$$

(2) (i) 计算得

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{z^2+5}{z(z+1)}\mathrm{d}z &= 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z^2+5}{z(z+1)} + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z^2+5}{z(z+1)}\right)\\ &= -2\pi i.\end{aligned}$$

(ii) 注意到 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z(z+1)}{(z^6+1)(z+3)}=0$, 因此 $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\dfrac{z+1}{(z^6+1)(z+3)}=0$, 从而

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2}\frac{z+1}{(z^6+1)(z+3)}\mathrm{d}z&=-2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=-3}\frac{z+1}{(z^6+1)(z+3)}\\&=-\frac{2}{365}\pi i.\end{aligned}$$

(3) 注意到 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z(z^4+1)}{z^2(z^3+1)}\mathrm{d}z=1$, 因此 $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}\dfrac{z^4+1}{z^2(z^3+1)}=-1$, 从而

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2}\frac{z^4+1}{z^2(z^3+1)}\mathrm{d}z&=-2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=\infty}\frac{z+1}{(z^6+1)(z+3)}\\&=2\pi i.\end{aligned}$$

(4) 设 $z=\mathrm{e}^{ix}$, 则 $\cos x=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$, 代入得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos x}\mathrm{d}x&=\frac{2}{i}\cdot\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\\&=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\\&=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},\end{aligned}$$

其中 $z_0=\dfrac{\sqrt{1-\varepsilon^2}-1}{\varepsilon}$.

(5) 考虑积分

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{3xi}}{1+x^2}\mathrm{d}x&=2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{\mathrm{e}^{3zi}}{1+z^2}\\&=\pi\mathrm{e}^{-3},\end{aligned}$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{e}^{-3}.$$

(6) 由 $z^4+1=0$ 解得 $z_1=\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\pi i}$, $z_2=\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi i}$, $z_3=\mathrm{e}^{\frac{5}{4}\pi i}$, $z_4=\mathrm{e}^{\frac{7}{4}\pi i}$, 从而

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x&=2\pi i\cdot\left(\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{1+z^2}{1+z^4}+\operatorname*{Res}_{z=z_2}\frac{1+z^2}{1+z^4}\right)\\&=\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

题目 3. 将函数 $f(z)=\dfrac{z^3}{1+z^2}$ 在下列圆环域展开成 Laurent 级数.
(1) $1<|z|<+\infty$; (2) $0<|z+i|<2$; (3) $0<|z-i|<2$.

解答. (1) 计算得

$$\begin{aligned} f(z) &= z\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z^2}} \\ &= z\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n-1}}. \end{aligned}$$

(2) 计算得

$$\begin{aligned} \frac{z^3}{1+z^2} &= z-\frac{z}{1+z^2} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}+i+(z-i)-\frac{1}{4i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{i-z}{2i}} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}+i+(z-i)-\frac{1}{4i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i-z}{2i}\right)^n. \end{aligned}$$

(3) 基本同 (2).

题目 3 的注记. 进行 Laurent 展开的时候, 首先需要化成最简分式.

题目 4. 判断下列函数的奇点类型, 并求留数.
(1) $f(z)=\dfrac{1}{z}-z\sin\dfrac{1}{z^2}+\exp\dfrac{1}{z}$;
(2) $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z(z^2-\pi^2))^2}$;
(3) $f(z)=\dfrac{z^2\cos\dfrac{1}{z}}{(1-z^2)}$.

解答. (1) $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点, 且展开得

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}-z\left(\frac{1}{z^2}+\cdots\right)+\left(1+\frac{1}{z}+\cdots\right) \\ &= 1+\frac{1}{z}+\cdots, \end{aligned}$$

因此 $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1$.
(2) $z = 0$ 是 $f(z)$ 的 1 阶极点, 且

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{(\pi^2-1)^2};$$

$z = \pm\pi$ 是 $f(z)$ 的 1 阶极点, 且

$$\operatorname*{Res}_{z=\pm\pi} = -\frac{1}{4\pi^4}.$$

(3) $z = \pm 1$ 是 $f(z)$ 的 1 阶极点, 且

$$\operatorname*{Res}_{z=\pm 1} = \frac{1}{2}\cos 1;$$

$z = 0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点, 且展开得

$$f(z) = z^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{z^4} + \cdots\right)\cdot\left(1 + z^2 + z^4 + \cdots\right),$$

其的 Laurent 级数只有偶数次幂项, 因此 $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0$. 或直接由 $f(z)$ 是偶函数得 $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0$.

题目 4 的注记. 若 0 为 f 的奇点且 f 为偶函数, 那么 $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0$.

题目 5. 求一个函数 $w = f(z)$, 使得它把上半单位圆盘 $\{z : |z| < 1, \mathrm{Im}z > 0\}$ 共形地映射成单位圆盘 $\{w : |w| < 1\}$.

解答. 令 $z_1 = f_1(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, 则 f_1 将上半单位圆盘映为角形区域 $D = \{z_1 : \mathrm{Re}z_1 > 0, \mathrm{Im}z_1 > 0\}$. 再令 $z_2 = f_2(z_1) = (z_1)^2$, 则 f_2 将 D 映为上半平面 $H = \{z_2 : \mathrm{Im}z_2 > 0\}$. 最后令 $w = f_3(z_2) = \dfrac{z_2 - i}{z_2 + i}$, 则 f_3 把 H 映为单位圆盘 $\{w : |w| < 1\}$. 从而令

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1,$$

则 f 将上半单位圆盘映为单位圆盘.

题目 5 的注记. 事实上, 还可以考虑 *Rokovsky* 变换, 令 $z_1 = \varphi(z) = -\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, 则 φ 将上半单位圆盘映为上半平面: 设 $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, 其中 $0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi$, 则

$$\varphi(r\mathrm{e}^{i\theta}) = -\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta - \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta i,$$

其中 $\mathrm{Re}\varphi \in [-\infty, \infty]$, $\mathrm{Im}\varphi \in [0, \infty]$, 且 $\{z : |z| = 1, \mathrm{Im}z \ge 0\}$ 被映为 $[-1, 1]$, $[-1, 1]$ 被映为 $[-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$.

题目 6. 求一个函数 $w=f(z)$, 使得它把上半平面去掉圆盘 $|z-i|\leq 1$ 的部分共形地映射成单位圆盘 $\{w:|w|<1\}$.

解答. 令 $z_1=f_1(z)=\dfrac{2\pi}{z}$, 则 f_1 将原区域映为带状区域 $\{z_1:0<\mathrm{Im}z_1<\pi\}$. 再令 $z_2=f_2(z_1)=\mathrm{e}^z$, 则 f_2 将带状区域映为上半平面 $H=\{z_2:\mathrm{Im}z_2>0\}$. 最后令 $w=f_3(z_2)=\dfrac{z_2-i}{z_2+i}$, 则 f_3 把 H 映为单位圆盘 $\{w:|w|<1\}$. 从而令

$$f=f_3\circ f_2\circ f_1,$$

则 f 将原区域映为单位圆盘.

题目 6 的注记. 反演变换 $z_1=\varphi(z)=\dfrac{1}{z}$ 可以将圆变为直线.

题目 7. 求多项式 $p(z)=5z^4+z^3-z+1$ 在单位圆盘内的零点个数.

解答. 当 $|z|=1$ 时, $|z^3-z+1|\leq|z|^3+|z|+1=3<5=|5z^4|$, 因此

$$N(p(z),|z|<1)=N(5z^4,|z|<1)=4,$$

也即 $p(z)$ 在单位圆盘内有 4 个零点.

题目 8. 是否存在 $f(z)$, 在单位圆盘内解析, 在闭单位圆盘内连续, 且满足: 当 $|z|=1, z=x+yi$ 时, 有 $f(z)=\mathrm{e}^{2x}+y^2+3x^2i$? 若存在请求出 $f(z)$; 若不存在请证明.

解答. 由 $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, 代入得

$$f(z)=\mathrm{e}^{z+\frac{1}{z}}+-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i,\quad |z|=1.$$

假设 $f(z)$ 是解析函数, 则 $\mathrm{e}^{-z}f(z)$ 也是解析函数, 则有

$$\begin{aligned}0&=\int_{|z|=1}\mathrm{e}^{-z}f(z)\mathrm{d}z\\&=2\pi i,\end{aligned}$$

矛盾, 从而不存在 $f(z)$.

题目 9. 设 $D=\{z:|z|<1\}$ 为单位圆盘, 求下列边值问题的解:

$$\Delta u=0,\quad z\in D,\quad u|_{\partial D}=2x^2+3y^2+x.$$

解答. 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=r\mathrm{e}^{i\theta}$, 则当 $r=1$ 时,

$$u|_{\partial D}=2\cos^2\theta+3\sin^2\theta+\cos\theta=\frac{5}{2}+\cos\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta.$$

则可令

$$u(r\mathrm{e}^{i\theta})=\frac{5}{2}+r\cos\theta-\frac{1}{2}r^2\cos 2\theta.$$

题目 10. 设复平面上的亚纯函数 $f(z)$ 满足

$$\left|(1+z^2)f(z)\right|\le\sqrt{r^3+1},\quad 其中\ r=|z|,$$

求一个函数 $w=f(z)$.

解答. 记 $F(z)=(1+z^2)f(z)$, 则 $|F(z)|\le\sqrt{r^3+1}$, 首先证明 F 可以延拓为解析函数. 设 a 是 F 的奇点, 则当 $z\in B_a(\delta)$ 时, 有

$$|F(z)|\le\sqrt{|a+\delta|^3+1}$$

从而 a 是 F 的可去奇点, 可以在 $z=a$ 处补充定义; 其次, 根据 Cauchy 不等式得

$$|a_n|=\frac{|F^{(n)}(0)|}{n!}\le\frac{\sqrt{r^3+1}}{r^n},\quad 其中\ r>0,$$

当 $n\ge 2$ 时, 令 $r\to\infty$, 可得 $a_n=0$, 从而 $F(z)$ 至多是一次多项式. 取 $F(z)=z$, 则函数

$$w=f(z)=\frac{z}{1+z^2}$$

满足条件.