实分析期末复习

统计 91 董晟渤

2021 年 6 月

目录

1 知识回顾

1.1 集合

定义 1 (极限)**.** 设 $\{A_n\}$ 为集合列, 记

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{i\geq n} A_i, \quad \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{i\geq n} A_i,$$

分别为 $\{A_n\}$ 的**上极限**和**下极限**. 若 $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$, 则 $\{A_n\}$ 的**极限**存在, 并记

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \limsup_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\to+\infty} A_n.$$

若 $\{A_n\}$ 单调递增, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$; 若 $\{A_n\}$ 单调递减, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$.

定义 2 (势)**.** $\bar{\bar{A}}$ 表示集合 A 的**势**. 设 $A, B \neq \varnothing$, 若存在单射 $f: A \to B$, 则记

$$\bar{\bar{A}} \preceq \bar{\bar{B}} \quad 或 \quad \bar{\bar{B}} \succeq \bar{\bar{A}}.$$

若 $\bar{\bar{A}} \preceq \bar{\bar{B}}$, $\bar{\bar{A}} \succeq \bar{\bar{B}}$, 则记 $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$, 否则记 $\bar{\bar{A}} \neq \bar{\bar{B}}$. 若 $\bar{\bar{A}} \preceq \bar{\bar{B}}$, 且 $\bar{\bar{A}} \neq \bar{\bar{B}}$, 则记 $\bar{\bar{A}} \prec \bar{\bar{B}}$.

定理 3 (Cantor-Bernstein-Schröeder 定理)**.** 若 $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$, 则存在双射 $f: A \to B$.

定义 4 (有限, 可数与不可数)**.** 若存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $\bar{\bar{A}} = \overline{\overline{\{1, 2, \cdots, n\}}}$, 则 A 为**有限集**, 否则 A 为**无限集**. 若 A 为无限集, 且 $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{\mathbb{N}}}$, 则 A 为**可数集**. 否则 A 为**不可数集**.

通常记集合 $\mathbb{N}$ 的元素个数为 $+\infty$, 以下记 $\mathbb{R} = [-\infty, +\infty]$.

1.2 测度

1.2.1 σ-域

设 X 为全集, $2^X = \{A : A \subset X\}$, $\mathscr{A} \in 2^X$.

定义 5 (σ-域)**.** 设 $\varnothing \neq \mathscr{A} \subset 2^X$, 若 $\mathscr{A}$ 满足:

(1) 若 $E \in \mathscr{A}$, 则 $E^C \in \mathscr{A}$;

(2) 若 $E_1, E_2, \cdots \in \mathscr{A}$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathscr{A}$,

则 $\mathscr{A}$ 为**σ-域**.

命题 6 (σ-域的性质). 设 $\mathscr{A}$ 为 σ-域.

(1) $\varnothing \in \mathscr{A}$, $X \in \mathscr{A}$;

(2) (有限交与有限并) 若 $E_1, E_2, \cdots, E_n \in \mathscr{A}$, 则

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathscr{A}, \quad \bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathscr{A};$$

(3) (可数交与可数并) 若 $E_1, E_2, \cdots \in \mathscr{A}$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathscr{A}, \quad \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathscr{A}.$$

定义 7 (生成 σ-域与 Borel 集). 设 $\mathscr{C} \subset 2^X$, 则

$$\sigma(\mathscr{C}) = \bigcap_{\mathscr{C} \subset \mathscr{A}} \mathscr{A}, \quad \mathscr{A} \text{ 为 } \sigma\text{-域}$$

为 $\mathscr{C}$ 的**生成 σ-域**. 记 $\mathscr{O} = \{\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \text{为开集}\}$, 则 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} = \sigma(\mathscr{O})$ 中的元素称为 $\mathbb{R}^n$ 中的 ***Borel* 集**.

1.2.2 测度

定义 8 (测度). 设 $\mathscr{A}$ 为 σ-域, 映射 $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$, 满足:

(1) $\mu(\varnothing) = 0$;

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{A}$ 互不相交, 则

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n),$$

则 μ 为 X 上的**测度**, $A \in \mathscr{A}$ 为**μ-可测集**, $\mu(A)$ 为 A 的测度. $\{X, \mathscr{A}, \mu\}$ 为**测度空间**.

命题 9 (测度的性质). 设 $\{X, \mathscr{A}, \mu\}$ 为测度空间.

(1) (有限可加性) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{A}$ 互不相交, 则

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k);$$

(2) (单调性) 设 $A, B \in \mathscr{A}$, $A \subset B$, 则 $\mu(A) \leq \mu(B)$;

(3) (可减性) 设 $A, B \in \mathscr{A}$, $A \subset B$, $\mu(A) < +\infty$, 则 $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$;

(4) (次可加性) 设 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{A}$, 则

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n);$$

(5) (极限) 设 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{A}$, $\{A_n\}$ 单调递增, 则

$$\mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n);$$

设 $\{A_n\}$ 单调递减, $\mu(A_1) < +\infty$, 则

$$\mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

定义 10 (零测集与完备). 设 $E \in \mathscr{A}$, $\mu(E) = 0$, 则 E 为**μ-零测集**. 设 $\{X, \mathscr{A}, \mu\}$ 为测度空间, 如果 X 中的 μ-零测集的子集都是 μ-零测集, 则 $\{X, \mathscr{A}, \mu\}$ 为**完备的测度空间**.

1.2.3 外测度

定义 11 (外测度). 映射 $\mu^* : 2^X \to [0, +\infty]$, 满足:

(1) $\mu^*(\varnothing) = 0$;

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots \in 2^X$, 则

$$\mu^*\left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n),$$

则 μ^* 为 X 上的**外测度**.

定理 12 (Caratheodory 定理). 设 μ^* 是 X 上的外测度, 则

$$\mathscr{A} = \left\{E \in 2^X : \mu^*(T) = \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \cap E^C), \forall T \in 2^X\right\}$$

为 σ-域, $\mu^*|_{\mathscr{A}}$ 为测度, $\mathscr{A}$ 中的元素称为**μ^*-可测集**.

定义 13 (Lebesgue 测度). 设

$$\mathcal{Q} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^n,$$

称 $\mathcal{Q}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**开方体**, 定义

$$m(\mathcal{Q}) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k);$$

再设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 定义

$$m^*(A) = \inf \sum_{k=1}^{+\infty} m(\mathcal{Q}_k), \quad \text{其中 } \mathcal{Q} \text{ 为开方体且} A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{Q}_k,$$

则 m^* 为 $\mathbb{R}^n$ 上的外测度. m^*-可测集为 ***Lebesgue* 可测集**, 并记它们所构成的集合为 $\mathscr{L}$, $m^*|_{\mathscr{L}}$ 为 ***Lebesgue* 测度**, 记为 m, $\{\mathbb{R}^n, \mathscr{L}, m\}$ 为测度空间.

定义 14 (Lebesgue-Stieltjes 测度)**.** 设 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是右连续的单调递增函数, 定义

$$m_F((a,b)) = F(b) - F(a),$$

再设 $A\subset\mathbb{R}$, 定义

$$m_F^*(A) = \inf\sum_{k=1}^{+\infty} m((a_k,b_k)), \quad 其中 A\subset\bigcup_{k=1}^{+\infty}(a_k,b_k),$$

则 m_F^* 为 $\mathbb{R}$ 上的外测度. m_F^*-可测集为 ***Lebesgue-Stieltjes* 可测集**, 并记它们所构成的集合为 $\mathscr{L}_F$, $m^*|_{\mathscr{L}_F}$ 为 ***Lebesgue-Stieltjes* 测度**, 记为 m_F, $\{\mathbb{R},\mathscr{L}_F,m_F\}$ 为测度空间. 特别地, 取 $F(x)=x$, 则 m_F 为 $\mathbb{R}$ 上的 *Lebesgue* 测度.

命题 15 (Lebesgue 测度的性质)**.** 设 $\{\mathbb{R}^n,\mathscr{L},m\}$ 为测度空间.

(1) Borel 集都是 Lebesgue 可测集;

(2) $\{\mathbb{R}^n,\mathscr{L},m\}$ *为完备的测度空间;*

(3) (平移不变性) 设 $A\in\mathscr{L}$, $b\in\mathbb{R}^n$, *则* $A+b$ *可测, 且* $m^*(A+b)=m^*(A)$;

(4) (正则性) 设 $A\in\mathscr{L}$, *则*

$$\begin{aligned} m(A) &= \inf\{m(\Omega):\Omega\supset A \text{且 } \Omega \text{ 为开集}\} \\ &= \sup\{m(K):K\subset A \text{且 } K \text{ 为紧集}\}. \end{aligned}$$

1.3 可测函数

1.3.1 可测函数的定义与性质

设 $\{X,\mathscr{A},\mu\}$ 为测度空间.

定义 16. 可测函数 设 $A\in\mathscr{A}$, $f:A\to\mathbb{R}$, 如果对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, $\{f>\lambda\}\in\mathscr{A}$, 则 f 为**μ-可测函数**. 若 $X=\mathbb{R}^n$, $\mathscr{A}=\mathscr{L}$, μ 是 *Lebesgue* 测度, 则 f 为 ***Lebesuge* 可测函数**.

命题 17. 可测函数的性质 设 $f,g,f_1,f_2,\cdots$ 是 μ-可测函数.

(1) 设 $B\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, *则* $\{f\in B\}\in\mathscr{A}$;

(2) $\alpha f+\beta g, fg, f/g(g\neq 0), |f|$ *是* μ*-可测函数;*

(3) $\inf f_n, \sup f_n, \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n, \limsup\limits_{n\to+\infty} f_n$ *是* μ*-可测函数.*

命题 18 (特征函数)**.** 设 $A\subset X$, 则

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x\in A, \\ 0, & x\in X-A \end{cases}$$

是 μ-可测函数当且仅当 $A \in \mathscr{A}$.

定义 19 (简单函数). 设 $A \in \mathscr{A}$, $\varphi : A \to \mathbb{R}$, 如果 Rgf 是有限集, 则 φ 为**简单函数**.

1.3.2 简单函数逼近可测函数

定理 20. 设 $A \in \mathscr{A}$, $f : A \to [0, +\infty]$ 是 μ-可测函数, 则存在简单函数 $\varphi_n : A \to [0, +\infty], n = 1, 2, \cdots$, 使得

(1) $0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1}$;

(2) φ_n 逐点收敛于 f.

定理 21. 设 $A \in \mathscr{A}$, $f : A \to [0, +\infty]$ 是有界的 μ-可测函数, 则存在简单函数 $\varphi_n : A \to [0, +\infty], n = 1, 2, \cdots$, 使得

(1) $0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1}$;

(2) φ_n 一致收敛于 f.

定理 22. 设 $A \in \mathscr{A}$, $f : A \to \mathbb{R}$ 是有界的 μ-可测函数, 则存在简单函数 $\varphi_n : A \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \cdots$, 使得

(1) $|\varphi_n| \leq |f|$;

(2) φ_n 一致收敛于 f.

1.3.3 连续函数逼近可测函数

定理 23 (Tietze 延拓定理). 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集, $f : K \to \mathbb{R}$ 连续, 则存在连续函数 $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 使得 $\tilde{f}\Big|_K = f$.

定理 24. 设 $A \in \mathscr{L}$, $f : A \to \mathbb{R}$ 是几乎处处有限的 *Lebesgue* 可测函数, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $E \subset A$, $m(E) \leq \varepsilon$, 使得 $f|_{A-E}$ 连续.

定理 25 (Лузин 定理). 设 $A \in \mathscr{L}$, $m(A) < +\infty$, $f : A \to \mathbb{R}$ 是几乎处处有限的 *Lebesgue* 可测函数, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在连续函数 $g : A \to \mathbb{R}$, 使得 $m(\{g \neq f\}) \leq \varepsilon$.

1.3.4 可测函数的收敛

为了让 $\{f_n\}$ 收敛于 f, 在收敛的定义中, 设 f 几乎处处有限. 否则, 若 $|f| = +\infty$, $f_n \to f$ 的话, 就不能称 $\{f_n\}$ 收敛. 这种情况, 通常说 $\{f_n\}$ 以 f 为极限, 但是不收敛.

定理 26 (Егóров 定理)**.** 设 $A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) < +\infty$, $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ 是 μ-可测函数, $n = 1, 2, \cdots$, 且 f 几乎处处有限. 若 f_n 逐点收敛于 f, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $E \subset A$, $\mu(E) \leq \varepsilon$, 使得 $f_n|_{A-E}$ 一致收敛于 $f|_{A-E}$.

定义 27 (几乎处处收敛)**.** 设 $A \in \mathscr{A}$, $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ 是 μ-可测函数, $n = 1, 2, \cdots$, 如果存在 $E \subset A$, $\mu(E) = 0$, 使得 $f_n|_{A-E}$ 逐点收敛于 $f|_{A-E}$, 则 f_n **几乎处处收敛**于 f, 记为 $f_n \to f, \mu - \text{a.e.}$.

命题 28. $f_n \to f, \mu - \text{a.e.}$ 当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{+\infty}\bigcup_{n=m}^{+\infty}\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

定义 29 (依测度收敛)**.** 设 $A \in \mathscr{A}$, $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ 是 μ-可测函数, $n = 1, 2, \cdots$, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0,$$

则 f_n **依测度 μ 收敛**于 f, 记为 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

定理 30 (Riesz 定理)**.** 设 $A \in \mathscr{A}$, $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ 是 μ-可测函数, $n = 1, 2, \cdots$, $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则存在子列 $\{f_{n_k}\}$, 使 $f_{n_k} \to f, \mu - \text{a.e.}$.

1.4 积分

1.4.1 积分的定义与性质

设 $\{X, \mathscr{A}, \mu\}$ 为测度空间.

定义 31 (积分)**.** 设 $A \in \mathscr{A}$, $\varphi : A \to [0, +\infty)$ 是简单函数, $\mathrm{Rg}\varphi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$, 则

$$\int_A \varphi \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n}\alpha_i\mu(\{f = \alpha_i\})$$

为 φ 的**积分**; 设 $f : A \to [0, +\infty]$ 是 μ-可测函数, 则

$$\int_A f\mathrm{d}\mu = \sup\int_A \varphi\mathrm{d}\mu, \quad \text{其中 } 0 \leq \varphi \leq f \text{ 为简单函数}$$

为 f 的积分; 最后, 设 $f : A \to \mathbb{R}$ 是 μ-可测函数, 记 $f = f^+ - f^-$, 若 $\int_A f^+\mathrm{d}\mu < +\infty$ 或 $\int_A f^-\mathrm{d}\mu < +\infty$, 则称 $\int_A f\mathrm{d}\mu$ **有定义**,

$$\int_A f\mathrm{d}\mu = \int_A f^+\mathrm{d}\mu - \int_A f^-\mathrm{d}\mu$$

为 f 的积分. 特别地, 若 $X=\mathbb{R}^n, \mathscr{A}=\mathscr{L}, \mu=m$, 则此时积分为 ***Lebesgue* 积分**, 若 $X=\mathbb{R}, \mathscr{A}=\mathscr{L}_F, \mu=m_F$, 则此时积分为 ***Lebesgue-Stieltjes* 积分**, 并可简记为

$$\int_A f\mathrm{d}F(x).$$

若 $\int_A f^+\mathrm{d}\mu<+\infty, \int_A f^-\mathrm{d}\mu<+\infty$, 则 f **μ-可积**, 记所有的 μ-可积函数所构成的函数集合为 $L^1(A)$.

命题 32 (积分的性质)**.** 设 $A\in\mathscr{A}$, $f,g:A\to\mathbb{R}$ 是 μ-可测函数.
(1) 设 $f=0, \mu-\text{a.e.}$, 则 $\int_A f\mathrm{d}\mu$ 有定义, 且 $\int_A f\mathrm{d}\mu=0$;
(2) (单调性) 设 $f,g\geq 0$ 或 $f,g\in L^1(A)$, $f\leq g$, 则 $\int_A f\mathrm{d}\mu\leq\int_A g\mathrm{d}\mu$;
(3) (区域可加性) 设 $A=B+C, B, C\in\mathscr{A}$, 如果 $f\geq 0$, 则 $\int_A f\mathrm{d}\mu=\int_B f\mathrm{d}\mu+\int_C f\mathrm{d}\mu$;
(4) (区域可加性) 设 $A=B+C, B, C\in\mathscr{A}$, 如果 $f\in L^1(A)$, 则 $f\in L^1(B)\cap L^1(C)$, 且 $\int_A f\mathrm{d}\mu=\int_B f\mathrm{d}\mu+\int_C f\mathrm{d}\mu$.

1.4.2 积分的收敛

定理 33 (Levi 单调收敛定理)**.** 设 $A\in\mathscr{A}$, $f_n, f: A\to[0,+\infty]$ 是 μ-可测函数, $n=1,2,\cdots$, $f_n\to f, n\to+\infty$, 若 $\{f_n\}$ 单调递增, 则

$$\int_A f_k\mathrm{d}\mu\to\int_A f\mathrm{d}\mu, \quad k\to+\infty.$$

定义 34 (绝对可积)**.** 设 $A\in\mathscr{A}$, $f:A\to[-\infty,+\infty]$ 是 μ-可测函数, 若

$$\int_A |f|\mathrm{d}\mu<+\infty,$$

则 f **绝对可积**.

可以证明 $f\in L^1(A)$ 当且仅当 f 绝对可积, 从而

$$L^1(A)=\left\{f:A\to\mathbb{R}:\int_A |f|\mathrm{d}\mu<+\infty\right\}.$$

命题 35 (绝对连续性)**.** 设 $A\in\mathscr{A}$, $f\in L^1(A)$, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 对任意的 $E\subset A$, $E\in\mathscr{A}$, $\mu(E)<\delta$, 都有

$$\int_E |f|\mathrm{d}\mu<\varepsilon.$$

定理 36 (Fatou 引理)**.** 设 $A \in \mathscr{A}$, $f_n : A \to [0, +\infty]$ 是 μ-可测函数, $n = 1, 2, \cdots$, 则

$$\int_A \liminf_{n \to +\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_A f_n \mathrm{d}\mu.$$

定理 37 (Lebesgue 控制收敛定理)**.** 设 $A \in \mathscr{A}$, $f_n, f \in L^1(A), n = 1, 2, \cdots$, $f_n \to f, n \to +\infty$, 若存在 $g : A \to [0, +\infty]$, $g \in L^1(A)$, 使得 $|f_n| \leq g, n = 1, 2, \cdots$, 则

$$\int_A |f_n - f| \mathrm{d}\mu \to 0, n \to +\infty, \quad \text{进而} \quad \int_A f_n \mathrm{d}\mu \to \int_A f \mathrm{d}\mu.$$

定理 38 (Fubini 定理)**.** 设 $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 是 *Lebesgue* 可测函数, $f = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$, 若 $f \geq 0$ 或 $f \in L^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, 则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \mathrm{d}\boldsymbol{y} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^m} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y} \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

一个重要的结论是: 对于非负函数 $f(x)$,

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} m(\{f > y\}) \mathrm{d}y.$$

1.5 微分

1.5.1 有界变差函数

定义 39 (变差与全变差)**.** 设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $p : a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ 为 $[a, b]$ 的一个分割, 记

$$V(f; p) = \sum_{i=1}^n |f(a_i) - f(a_{i-1})|,$$

其为 f 对于分划 p 的**变差**; 记

$$V(f) = \sup_p V(f; p),$$

其为 f 的**全变差**. 若 $V(f) < +\infty$, 则 f 为**有界变差函数**, 其所构成的集合记为

$$BV([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : V(f) < +\infty\}.$$

设 $f \in C^1([a, b])$, 则 $f \in BV([a, b])$, 且 $V(f) = \displaystyle\int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x$; 设 f 单调递增, 则 $f \in BV([a, b])$, 且 $V(f) = f(b) - f(a)$; 设 f 是 Lipschitz 函数, 则 $f \in BV([a, b])$.

命题 40 (有界变差函数的性质)**.** 设 $f,g\in BV([a,b])$.

(1) $V(f)\geq|f(b)-f(a)|$*;*

(2) f 有界*;*

(3) $\alpha f+\beta g\in BV([a,b])$.

定理 41 (Jordan 分解)**.** 设 $f\in BV([a,b])$, 则存在单调增函数 $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$, 使

$$f=g-h.$$

1.5.2 几个重要结论

命题 42. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调递增, 则 f 连续, $m-$a.e..

定理 43 (Lebesgue 微分定理)**.** 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调递增, 则 f 可导, $m-$a.e., 且

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leq f(b)-f(a).$$

命题 44. 设 $f\in BV([a,b])$, 则 f 可导, $m-$a.e., 且 $f'\in L^1([a,b])$.

命题 45. 设 $f,g\in C([a,b])$, 若 $f=g,m-$a.e., 则 $f=g$.

定理 46 (微积分基本定理)**.** 设 $f\in L^1([a,b])$, 则 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)=f(x),\quad m-\text{a.e.}.$$

特别地, 设 $f\in C([a,b])$, 则上式对任意的 $x\in[a,b]$ 成立.

1.5.3 绝对连续函数

定义 47 (绝对连续函数)**.** 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 如果对任意的 $(a_i,b_i)\subset[a,b]$, $i=1,2,\cdots,m$ 互不相交, 并且

$$\sum_{i=1}^m|b_i-a_i|<\delta,$$

都有

$$\sum_{i=1}^m|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon,$$

则 f 为**绝对连续函数**, 其所构成的集合记为

$$AC([a,b])=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}:f\text{绝对连续}\}.$$

设 f 是 Lipschitz 函数, 则 $f \in AC([a,b])$; 设 $f \in L^1([a,b])$, 记 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x \in [a,b]$, 则 $F \in AC([a,b])$.

命题 48 (绝对连续函数的性质)**.** *设 $f, g \in AC([a,b])$.*

(1) f 一致连续;

(2) $\alpha f + \beta g, fg \in AC([a,b])$;

(3) $f \in BV([a,b])$.

由 $f \in BV([a,b])$ 知 f 可导, $m-$a.e., 且 $f' \in L^1([a,b])$.

定理 49 (Leibniz 公式)**.** *设 $f \in AC([a,b])$, 则*

$$\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

定理 50. *设 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, 则 $f \in AC([a,b])$ 当且仅当, 存在 $g \in L^1([a,b])$, 使得*

$$f(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t + c, \quad x \in [a,b].$$

1.6 概率论基础

1.6.1 概率空间

通常, 用 Ω 表示样本空间, $\omega \in \Omega$ 为样本点. 样本空间的子集 $A \subset \Omega$ 称为事件, 事件所构成的集合可以用 $\mathscr{F}$ 表示.

定义 51 (概率)**.** *设 Ω 是样本空间, $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的 σ-域, $\mathbb{P}$ 是 $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ 上的测度, 且满足 $\mathbb{P}\{\Omega\} = 1$, 则 $\mathbb{P}$ 为***概率***, $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ 为***概率空间***.*

概率其实就是测度, 只是外加了 $\mathbb{P}\{\Omega\} = 1$ 这个条件. 在有限的测度下, 许多问题都变得非常简单. 另外, 设 $A \in \mathscr{F}$, 则 $\mathbb{P}\{A\}$ 也被称为事件 A 发生的概率. 以下设 $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ 是概率空间.

如果 Ω 是有限集, λ 是计数测度的话, 定义 $\mathbb{P}\{A\} = \dfrac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$, 这样的概率空间即为**古典概型**; 而如果 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Lebesgue 可测集, m 是 Lebesgue 测度的话, 定义 $\mathbb{P}\{A\} = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$, 这样的概率空间即为**几何概型**.

定义 52 (分布函数)**.** *设 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是右连续的单调递增函数, 则 F 为***准分布函数***; 如果 $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, 则 F 为***分布函数***.*

每一个准分布函数 F, 都决定着 $\mathbb{R}$ 上的一个 Lebesgue-Stieltjes 测度 m_F.

1.6.2 随机变量

定义 53 (随机变量)**.** 设 $X:\Omega\to\mathbb{R}$ 是可测函数, 则 X 为**随机变量**.

定义 54 (特征函数)**.** 设 $A\in\mathscr{F}$, 令

$$\chi_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A,\\ 0, & \omega\in\Omega\setminus A,\end{cases}$$

则 χ_A 是随机变量, 为事件 A 的**特征函数**.

定义 55 (分布函数)**.** 设 X 是概率空间 $\{\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}\}$ 上的随机变量, 令

$$F_X(x)=\mathbb{P}\{X\le x\},\quad x\in\mathbb{R},$$

则 $F_X(x)$ 为 X 的**分布函数**.

可以验证上面所定义的分布函数是右连续的单调递增函数, 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$. 事实上, 满足这三条性质的函数一定也是某个随机变量的分布函数.

定义 56 (离散型分布)**.** 设 X 是概率空间 $\{\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}\}$ 上的随机变量, 若

$$\mathrm{Rg}X=\{a_1,a_2,\cdots\}$$

包含至多可数个实数, 则其为**离散型随机变量**, 对应的分布函数

$$F_X(x)=\sum_{a_n<x}\mathbb{P}\{X=a_n\}$$

为**离散型分布**.

定义 57 (连续型分布)**.** 设 X 是概率空间 $\{\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}\}$ 上的随机变量, $F_X(x)$ 为 X 的分布函数, 若存在非负函数 $p(x)\in L^1(\mathbb{R})$, 使得

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbb{R},$$

则 X 为**连续型随机变量**, $F_X(x)$ 为**连续型分布**, $p(x)$ 为 X 的**概率密度**.

若 X 既不是离散型随机变量, 也不是连续型随机变量, 则 X 为**奇异型随机变量**.

1.6.3 期望, 矩与特征函数

定义 58 (期望). 设 $X \in L^1(\Omega)$, 则

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P}$$

为 X 的**期望**.

定理 59 (概率空间的积分). 设 $F_X(x)$ 为 X 的分布函数, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是可测函数, 则

$$\mathbb{E}g(X) = \int_\mathbb{R} g \mathrm{d}F_X(x),$$

并且只要等式一端有意义, 另一端就有意义. 特别地, 取 $g(x) = x$, 则有

$$\mathbb{E}X = \int_\mathbb{R} x \mathrm{d}F_X(x).$$

若 X 是离散型随机变量, 设 $\mathrm{Rg}X = \{a_1, a_2, \cdots\}, p_n = \mathbb{P}\{X = a_n\}, n = 1, 2, \cdots$, 则

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n p_n;$$

若 X 是连续型随机变量, 设密度函数为 $p(x)$, 则

$$\mathbb{E}X = \int_\mathbb{R} x p(x) \mathrm{d}x.$$

定义 60 (矩). 设 $X \in L^r(\Omega)$, 则 $\mathbb{E}X^r$ 为 X 的r **阶矩**, $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^r$ 为 X 的r **阶中心矩**. 特别地, 当 $r = 2$ 时, 2 阶中心距即为 X 的**方差**, 记作 $\mathrm{Var}X$.

设 $F_X(x)$ 为 X 的分布函数, 则容易得到计算公式

$$\mathbb{E}X^r = \int_\mathbb{R} x^r \mathrm{d}F_X(x), \quad \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^r = \int_\mathbb{R} (x - \mathbb{E}X)^r \mathrm{d}F_X(x).$$

定理 61 (C_r 不等式). 设 $r > 0$, 定义

$$C_r = \begin{cases} 2^{r-1}, & r \geq 1, \\ 1, & 0 < r < 1, \end{cases}$$

随机变量 $X_1, X_2 \in L^r(\Omega)$, 则有

$$\mathbb{E}|X_1 + X_2|^r \leq C_r(\mathbb{E}|X_1|^r + \mathbb{E}|X_2|^r).$$

定理 62 (Chebyshev 不等式). 设 X 是随机变量, $g:[0,+\infty)\to[0,\infty)$ 单调递增, 若 $g(|X|)\in L_1$, 则对任意的 $a>0$, $g(a)>0$, 都有

$$\mathbb{P}\{|X|\geq a\}\leq\frac{\mathbb{E}g(|X|)}{g(a)}.$$

若 $X\in L_r$, 取 $g(x)=x^r$ 得

$$\mathbb{P}\{|X|\geq x\}\leq\frac{\mathbb{E}|X|^r}{x^r},\quad\forall x>0;$$

取 $r=2$ 得

$$\mathbb{P}\{|X-\mathbb{E}X|\geq x\}\leq\frac{\mathrm{Var}X}{x^2}.$$

定义 63 (特征函数). 设 X 是概率空间 $\{\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}\}$ 上的随机变量, 则

$$f(t)=\mathbb{E}\mathrm{e}^{itX}$$

为 X 的**特征函数**.

命题 64 (特征函数的性质). 设 $f(t)$ 是随机变量 X 的特征函数.
(1) $f(0)=1$;
(2) $f|(t)|\leq1,\forall t\in\mathbb{R}$;
(3) $f(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

命题 65 (特征函数的 Taylor 展开式). 设 $f(t)$ 是随机变量 X 的特征函数, $X\in L_n$, 则

$$f(t)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}X^k+o(t^n),\quad t\to0.$$

命题 66 (特征函数的反演公式). 设 $f(t)$ 是分布函数 F 的特征函数, 则

$$\bar{F}(b)-\bar{F}(a)=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-itb}-\mathrm{e}^{-ita}}{-it}f(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $\bar{F}(x)=\dfrac{F(x)+F(x-0)}{2}$.

设 X 是连续型随机变量, 密度函数为 $p(x)$, 特征函数为 $f(t)$, 则

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-itx}f(t)\mathrm{d}t,$$

其中积分的计算可以应用复分析中的留数定理.

1.6.4 随机变量的收敛

借助实分析中的收敛模式, 还可以讨论随机变量的收敛. 设 $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ 是概率空间, $\{X_n\}$ 是随机变量序列, X 是随机变量.

定义 67 (几乎必然收敛)**.** *设 $X_n \to X, \text{a.e.}$, 则 X_n* **几乎必然收敛***于 X, 记作 $X_n \to X, \text{a.s.}$.*

若 $X_n \to X, \text{a.s.}$, 则有 $\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to+\infty} X_n = X\right\} = 1$.

定义 68 (依概率收敛)**.** *设 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, 则 X_n* **依概率收敛***于 X, 记作 $X_n \xrightarrow{p} X$.*

若 $X_n \xrightarrow{p} X$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 有 $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$.

定义 69 (平均收敛)**.** *设 $X_n, X \in L^r(\Omega)$, 其中 $r > 0$, 若*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}|X_n - X|^r = 0,$$

则 X_n **依 r 阶平均收敛***于 X, 记为 $X_n \xrightarrow{L_r} X$.*

定义 70 (依分布收敛)**.** *设 X_n, X 对应的分布函数为 $F_n, F, n = 1, 2, \cdots$, 若*

$$F_n(x) \to F(x), \quad \text{对任意的 } F(x) \text{ 的连续点 } x,$$

则 $\{F_n\}$ **弱收敛***到 F, 记为 $F_n \xrightarrow{w} F$; $\{X_n\}$* **依分布收敛***于 X, 记为 $X_n \xrightarrow{d} X$.*

定理 71 (连续性定理)**.** *设 X_n, X 对应的特征函数为 $f_n, f(t), n = 1, 2, \cdots$, 则 $X_n \xrightarrow{d} X$ 当且仅当*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

研究随机变量的收敛时, Levi 单调收敛定理和 Lebesgue 控制收敛定理同样适用.

命题 72 (蕴含关系)**.** *(1) 若 $X_n \to X, \text{a.s.}$, 则 $X_n \xrightarrow{p} X$;*
(2) 若 $X_n \xrightarrow{L_r}$, 则 $X_n \xrightarrow{p} X$;
(3) 若 $X_n \xrightarrow{p} X$, 则 $X_n \xrightarrow{d} X$;
(4) 设 c 为常数, 则 $X_n \xrightarrow{p} c$ 当且仅当 $X_n \xrightarrow{d} c$.

定理 73 (Слýцкий引理)**.** *若 $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{p} 0, W_n \xrightarrow{p} 1$, 则*

$$W_n X_n + Y_n \xrightarrow{p} X.$$

随机变量的收敛可以用于研究大数律与中心极限定理. 在此由于篇幅有限, 同时这部分内容不是实分析的重点, 便不再提及.

2 作业解答

设 $\{X, \mathscr{A}, \mu\}$ 为测度空间.

题目 1. 求极限:
(1) $A_n = (0, n)$; (2) $A_n = (n, +\infty)$; (3) $A_n = \left[0, \dfrac{1}{n}\right)$;
(4) $A_n = \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$; (5) $A_n = \left(0, \dfrac{1}{n}\right]$.

解答. (1) 此时 $\{A_n\}$ 单调递增, 因此

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = (0, +\infty).$$

特别注意, 对任意的 $x > 0$, 都存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in (0, n)$.
(2) 此时 $\{A_n\}$ 单调递减, 因此

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \varnothing.$$

特别注意, 对任意的 $x > 0$, 都存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $x \notin [n, +\infty)$.
(3) 此时 $\{A_n\}$ 单调递减, 因此

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \{0\}.$$

(4) 此时 $\{A_n\}$ 单调递减, 因此

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \{0\}.$$

(5) 此时 $\{A_n\}$ 单调递减, 因此

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \varnothing.$$

特别注意, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $0 \notin \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$, 对任意的 $x > 0$, 都存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $x \notin \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$, 因此最后的结果是 $\varnothing$.

题目 2. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续的充要条件是, 对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, f 的上水平集 $\{f>\lambda\}$ 和下水平集 $\{f<\lambda\}$ 都为开集.

解答. f 在 $\mathbb{R}$ 上连续当且仅当对任意的开集 $\Omega\subset\mathbb{R}$, $\{f\in\Omega\}$ 都为开集.
充分性: 由 $(\lambda,+\infty),(-\infty,\lambda)$ 是开集知 $\{f>\lambda\},\{f<\lambda\}$ 也是开集;
必要性: 对任意的 $(a,b)\subset\mathbb{R}$, $\{a<f<b\}=\{f>a\}\cap\{f<b\}$ 为开集. 注意到任意的开集 $\Omega\subset\mathbb{R}$ 都可以写成可数个不相交的闭区间 $(a_n,b_n),n=1,2,\cdots$ 的并, 也即

$$\Omega=\bigcup_{n=1}^{+\infty}(a_n,b_n),$$

因此

$$\{f\in\Omega\}=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{a_n<f<b_n\}$$

为开集, 从而 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

题目 3. 设 $A,B\in\mathscr{A}$, 证明: 如果 $\mu(A\Delta B)=0$, 则 $\mu(A)=\mu(B)$.

解答. 注意到 $A\Delta B=(A\cap B^C)+(B\cap A^C)$, 因此

$$0=\mu(A\Delta B)=\mu(A\cap B^C)+\mu(B\cap A^C),$$

从而 $\mu(A\cap B^C)=\mu(B\cap A^C)=0$. 计算得

$$\mu(A)=\mu(A\cap B)+\mu(A\cap B^C)=\mu(A\cap B),$$

同理 $\mu(B)=\mu(A\cap B)$, 因此 $\mu(A)=\mu(B)$.

题目 4. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续, $G=\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}\}$, 计算 $m(G)$.

解答. 首先, 根据 G 是闭集知 G 是 Lebesgue 可测集. 记 $G_{[a,b]}=\{(x,f(x)):a\le x\le b\}$, 容易证明 $m(G[a,b])=0$. 注意到

$$G=\bigcup_{n=1}^{+\infty}G_{[-n,n]},$$

因此

$$m(G) \le \sum_{n=1}^{+\infty} m(G_{[-n,n]}) = 0.$$

题目 5. 记 $S^2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1\}$, 计算 $m(S^2)$.

解答. 首先, 根据 S 是闭集知 S 是 Lebesgue 可测集. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, $m\left(S^2 + \left(0,0,\frac{1}{2^n}\right)\right) = m(S^2)$. 注意到

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(S^2 + \left(0,0,\frac{1}{2^n}\right)\right) \subset [-1,1]\times[-1,1]\times[-1,2],$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty} m(S^2) \le \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(S^2+\left(0,0,\frac{1}{2^n}\right)\right)\right) \le 12,$$

若 $m(S^2) > 0$, 则 $+\infty \le 12$, 矛盾, 因此 $m(S^2)=0$.

题目 6. 设 $A \in \mathscr{A}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) \equiv c \in \mathbb{R}$, 证明: f 是 μ-可测函数.

解答. 若 $\lambda < c$, 则 $\{f > \lambda\} = A \in \mathscr{A}$; 若 $\lambda \ge c$, 则 $\{f > \lambda\} = \varnothing \in \mathscr{A}$. 因此对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, $\{f > \lambda\} \in \mathscr{A}$, 从而 f 是 μ-可测函数.

题目 7. 设 $A \in \mathscr{A}$, $f : A \to \mathbb{R}$ 为 μ-可测函数, 定义 $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \in X - A, \end{cases}$$

称 $\tilde{f}$ 为 f 的零延拓. 证明: $\tilde{f}$ 是 μ-可测函数.

解答. 注意到 $\tilde{f} = f\chi_A$, 其中 f 与 χ_A 是 μ-可测函数, 从而 $\tilde{f}$ 是 μ-可测函数.

题目 8. 设 $A \in \mathscr{A}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Rg}f = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, 记 $E_k = \{f = \alpha_k\}, k = 1,2,\cdots,n$, 证明: 如果 $E_k \in \mathscr{A}, k = 1,2,\cdots,n$, 则 f 是 μ-可测函数.

解答. 注意到 $f=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{E_k}$, 其中根据 $E_k\in\mathscr{A}$, 知 χ_{E_k} 是 μ-可测函数, $k=1,2,\cdots,n$, 从而 f 是 μ-可测函数.

题目 9. 设 $A\in\mathscr{L}$, $f:A\to\mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测函数, $m(A)<+\infty$, 证明: 存在连续函数 $g_n:A\to\mathbb{R}, n=1,2,\cdots$, 使得 $g_n\to f, m-\text{a.e.}$.

解答. 由 Lusin 定理, 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 存在连续函数 f_n, 使得 $m(\{f_n\neq f\})\leq\dfrac{1}{n}$. 设 $\delta>0$, 注意到 $\{|f_n-f|>\delta\}\subset\{f_n\neq f\}$, 因此

$$m(\{|f_n-f|>\delta\})\leq m(\{f_n\neq f\})\leq\frac{1}{n}\to 0,$$

因此 $f_n\xrightarrow{m}f$, 由 Riesz 定理, 存在子列 $\{f_{n_k}\}$, 使 $f_{n_k}\to f, m-\text{a.e.}$.

题目 9 的注记. 该结论说明了 Lebesuge 可测函数可以用连续函数逼近.

题目 10. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$, $\int_{\mathbb{R}}f\mathrm{d}m$ 是否有定义? 如果有定义, 计算 $\int_{\mathbb{R}}f\mathrm{d}m$.

解答. 注意到 $\int_{\mathbb{R}}f^+\mathrm{d}m=\int_{\mathbb{R}}f^-\mathrm{d}m=+\infty$, 因此 $\int_{\mathbb{R}}f\mathrm{d}m$ 无定义.

题目 11. 设 $f:\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, $f(x)=\ln x$, $\int_{\left[\frac{1}{2},+\infty\right)}f\mathrm{d}m$ 是否有定义? 如果有定义, 计算 $\int_{\left[\frac{1}{2},+\infty\right)}f\mathrm{d}m$.

解答. 注意到 $\int_{\mathbb{R}}f^+\mathrm{d}m=+\infty, \int_{\mathbb{R}}f^-\mathrm{d}m<+\infty$, 因此 $\int_{\mathbb{R}}f\mathrm{d}m=+\infty$.

题目 12. 设 $A\in\mathscr{A}$, $f:A\to[0,+\infty]$ 是 μ-可测函数, 证明:

$$\int_A f\mathrm{d}\mu\geq\lambda\mu(\{f\geq\lambda\}),$$

其中 $0<\lambda<+\infty$.

解答. 计算得

$$\begin{aligned}\int_A f\mathrm{d}\mu &= \int_{f\le\lambda} f\mathrm{d}\mu + \int_{f>\lambda} f\mathrm{d}\mu \\ &> 0 + \lambda\cdot\mu(\{f>\lambda\}) \\ &= \lambda\cdot\mu(\{f>\lambda\}).\end{aligned}$$

题目 13. 设 $A\in\mathscr{A}$, $f: A\to[0,+\infty]$ 是 μ-可测函数, 定义

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)\le n, x\in A, \\ n, & f(x)>n, x\in A,\end{cases}$$

证明: (1) $f_n: A\to[0,+\infty)$ 是 μ-可测函数;
(2) $\displaystyle\int_A f_n\mathrm{d}\mu \to \int_A f\mathrm{d}\mu, n\to+\infty$.

解答. (1) 首先由 $|f_n|\le n$ 得 $f_n: A\to[0,+\infty)$, 其次注意到

$$f_n = f(x)\chi_{\{f\le n\}} + n\chi_{\{f>n\}},$$

其中由 f 是 μ-可测函数, 知 $\{f\le n\},\{f>n\}\in\mathscr{A}$, 因此 $\chi_{\{f\le n\}},\chi_{\{f>n\}}$ 是 μ-可测函数, 从而 f_n 是 μ-可测函数.
(2) $f_n\le f_{n+1}, n=1,2,\cdots$, 且 $f_n\to f$. 由 Levi 单调收敛定理得 $\displaystyle\int_A f_n\mathrm{d}\mu\to\int_A f\mathrm{d}\mu$.

题目 14. 设 $A\in\mathscr{A}$, $f,g: A\to\mathbb{R}$ 是 μ-可测函数, $f,g\ge 0$ 或 $f,g\in L^1(A)$, 证明: 如果 $f=g,\mu-a.e.$, 则 $\displaystyle\int_A f\mathrm{d}\mu=\int_A g\mathrm{d}\mu$.

解答. 由 $f=g,\mu-a.e.$ 知存在 $E\subset A, \mu(E)=0$, 使得 $f(x)=g(x)$ 对任意的 $x\in A-E$ 成立. 根据积分的区域可加性得

$$\begin{aligned}\int_A f\mathrm{d}\mu &= \int_{A-E} f\mathrm{d}\mu + \int_E f\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{A-E} f\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{A-E} g\mathrm{d}\mu \\ &= \int_A g\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

因此 $\int_A f\mathrm{d}\mu = \int_A g\mathrm{d}\mu$.

题目 15. 设 $A \in \mathscr{A}$, $f, g \in L^1(A)$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 证明

$$\int_A |fg|\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_A |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |g|^q \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

解答. 由 Young 不等式, 设 $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则有

$$\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\int_A |fg|\mathrm{d}\mu}{\left(\displaystyle\int_A |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\displaystyle\int_A |g|^q \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}} &\leq \frac{\displaystyle\int_A |f|^p \mathrm{d}\mu}{p \cdot \left(\displaystyle\int_A |f|^p \mathrm{d}\mu\right)} + \frac{\displaystyle\int_A |g|^q \mathrm{d}\mu}{q \cdot \left(\displaystyle\int_A |g|^q \mathrm{d}\mu\right)} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

题目 15 的注记. 这个不等式也被叫做 *Hölder* 不等式.

题目 16. 设 $A \in \mathscr{A}$, $f \in L^1(A)$, 定义

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq n, \\ n, & f(x) > n, \\ -n, & f(x) < -n, \end{cases}$$

证明 $f_n \in L^1(A)$ 且 $\int_A f_n \mathrm{d}\mu \to \int_A f\mathrm{d}\mu$.

解答. 首先由

$$\int_A |f_n|\mathrm{d}\mu \leq \int_A |f|\mathrm{d}\mu < +\infty$$

知 $f_n \in L^1(A)$, 其次取 $g = |f| \in L^1(A)$, 则 $|f_n| \leq g, n = 1, 2, \cdots$, 由 Lebesgue 控制收敛定理得 $\int_A f_n \mathrm{d}\mu \to \int_A f\mathrm{d}\mu$.

题目 17. 设 $f_n, f \in L^1(A)$, $f_n \to f$, 如果
(1) $\mu(A) < +\infty$; (2) $|f_n| \leq M, n = 1, 2, \cdots$, M 为正常数,
则 $\int_A f_n \mathrm{d}\mu \to \int_A f \mathrm{d}\mu$.

解答. 取 $g = M$, 由 $\mu(A) < +\infty$ 知

$$\int_A g \mathrm{d}\mu = M\mu(A) < +\infty,$$

因此 $g \in L^1(A)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理得 $\int_A f_n \mathrm{d}\mu \to \int_A f \mathrm{d}\mu$.
题目 17 的注记. 事实上, 这个结论叫作 *Lebesgue* 有界收敛定理.

题目 18. 设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 连续, $f > 0$, 记

$$G = \{(x, y) : a < x < b, 0 < y < f(x)\},$$

计算积分 $\int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \chi_G(x, y) \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y$.

解答. 计算得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \chi_G(x, y) \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}} m(\{0 \leq f(x) \leq y\}) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty} m(\{f > y\}) \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

题目 18 的注记. 一个重要的推论是

$$\int_{[a,b]} f \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} m(\{f > y\}) \mathrm{d}y.$$

题目 19. 设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续函数, 证明: 存在 $E \subset [a, b]$, $m(E) = 0$, 存在 $L > 0$, 使得 $|f'(x)| \leq L$ 对任意的 $x \in [a, b] - E$ 成立.

解答. 由 f 是 Lipschitz 函数知 $f \in AC([a, b])$, 从而存在 $E \subset [a, b]$, $m(E) = 0$, 对任意的 $x \in [a, b] - E$, $f'(x)$ 有定义. 设对任意的 $x, y \in [a, b]$, 都有 $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, 整理得

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L$$

当 $x \in [a,b] - E$ 时, 令 $y \to x$, 则有 $|f'(x)| \le L$.

题目 20. 设 $f \in L^1([a,b] \times [c,d])$, 定义

$$\varphi_y(x) = \int_a^x f(t,y)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b],$$

其中 $y \in [c,d]$, 证明: 存在 $E \subset [c,d]$, $m(E) = 0$, 使得 $\varphi_y \in AC([a,b])$ 对任意的 $y \in [c,d] - E$ 成立.

解答. 由 $f \in L^1([a,b] \times [c,d])$ 知

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y < +\infty,$$

从而 $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 对 y 有限, $m-$a.e.. 选取 $E \subset [c,d]$, $m(E) = 0$, 使得

$$\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x < +\infty, \quad \forall y \in [c,d] - E,$$

则由积分的绝对连续性知, $\varphi_y \in AC([a,b])$ 对任意的 $y \in [c,d] - E$ 成立.

3 习题课

设 $\{X, \mathscr{A}, \mu\}$ 为测度空间, m 为 Lebesgue 测度, $B_r = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| < r\}$.

题目 1. 设 $f \in L^1(X)$, $f \geq 0$, 定义 $\lambda : \mathscr{A} \to [-\infty, +\infty]$,

$$\lambda(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu, \quad A \in \mathscr{A},$$

证明: λ 是 X 上的测度.

解答. 首先, 根据 $f \geq 0$ 得 λ 非负; 其次, 根据 $\mu(\varnothing) = 0$ 得 $\lambda(\varnothing) = 0$; 接下来, 设 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{A}$ 互不相交, 则

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \int_{\sum_{n=1}^{+\infty} A_n} f \mathrm{d}\mu \\
&= \int_X f \chi_{\sum_{n=1}^{+\infty} A_n} \mathrm{d}\mu \\
&= \int_X f \lim_{n\to+\infty} \chi_{\sum_{k=1}^{n} A_k} \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f \chi_{A_k} \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{A_k} f \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n),
\end{aligned}$$

其中积分与极限的交换应用了 *Levi 单调收敛定理*, 从而 λ 是 X 上的测度.

题目 1 的注记. 其一, 不能直接通过积分的*区域可加性*得到可数可加性. 这是因为区域可加性是对于两个积分区域而言, 可以推广到对于有限个积分区域而言, 但不能推广到对于可数个积分区域而言; 其二, 若去掉 $f \geq 0$ 的条件, 则 λ 不具有非负性, 但是同样具有 $\lambda(\varnothing) = 0$ 和可数可加性的性质, 这样的测度被称为*符号测度*.

题目 2. 设 $\lambda : 2^{\mathbb{N}} \to [0, +\infty]$ 为*计数测度*.

(1) 求 $\lambda\big(\{p \in \mathbb{N}, p\text{为素数}\}\big)$;

(2) 设 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, 则 f 是 λ-可测函数;

(3) 设 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(k)=0(k>2)$, 计算 $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f\mathrm{d}\lambda$;

(4) 设 $f(k)=\dfrac{1}{k}$, 计算 $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f\mathrm{d}\lambda$.

解答. (1) 素数有无穷多个, 从而 $\lambda\big(\{p\in\mathbb{N}, p\text{为素数}\}\big)=+\infty$;

(2) 对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, $\{f>\lambda\}\in 2^{\mathbb{N}}$ 可测, 从而 f 是 λ-可测函数;

(3) f 是简单函数, 从而

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} f\mathrm{d}\lambda &= 1\times\lambda(\{1\})+2\times\lambda(\{2\})\\ &=1+2\\ &=3;\end{aligned}$$

(4) 此时

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} f\mathrm{d}\lambda &= \int_{\mathbb{N}} f\lim_{n\to+\infty}\chi_{\{1,2,\cdots,n\}}\mathrm{d}\lambda\\ &=\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{N}} f\chi_{\{1,2,\cdots,n\}}\mathrm{d}\lambda\\ &=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\\ &=+\infty,\end{aligned}$$

其中积分与极限的交换应用了 *Levi* 单调收敛定理.

题目 2 的注记. 本题的 (4) 说明了级数实质上是利用计数测度的积分, 从而级数与积分的交换次序可以使用 *Fubini* 定理.

题目 3. 设 $a\in X$, 定义 *Dirac* 测度 $\delta_a: 2^X\to[0,+\infty]$,

$$\delta_a=\begin{cases}0, & a\notin E,\\ 1, & a\in E.\end{cases}$$

计算 $\displaystyle\int_X f\mathrm{d}\delta_a$.

解答. 计算得

$$\begin{aligned}\int_X f\mathrm{d}\delta_a &= \int_{\{a\}} f\mathrm{d}\delta_a + \int_{X-\{a\}} f\mathrm{d}\delta_a \\ &= f(a)+0 \\ &= f(a),\end{aligned}$$

其中 $\delta_a(X-\{a\})=0$.

题目 4. 设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是 m-可测函数, $m(\{f>\lambda\})=\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda>0)$, 计算 $\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}m$.

解答. 计算得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}m &= \int_0^{+\infty} m(\{f>y\})\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y \\ &= 1.\end{aligned}$$

另外, 若将 f 视为随机变量, 则其分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geq 0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

从而 $f\sim \mathrm{Exp}(1)$, 计算得

$$\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}m = \mathbb{E}f = 1.$$

题目 4 的注记. 事实上, 上面计算期望的过程应用了 *Lebesgue-Stieltjes* 积分.

题目 5. 设 $B_1=\{(x,y),x^2+y^2<1\}$, 计算 $\int_{B_1} \ln\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}m$.

解答. 根据 *Levi* 单调收敛定理得

$$\begin{aligned}\int_{B_1} \ln\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}m &= \int_{\mathbb{R}^2} \ln\sqrt{x^2+y^2}\lim_{k\to+\infty}\chi_{B_1-B_{1/k}}\mathrm{d}m \\ &= \lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2} \ln\sqrt{x^2+y^2}\chi_{B_1-B_{1/k}}\mathrm{d}m \\ &= \lim_{k\to+\infty}\int_{B_1-B_{1/k}} \ln\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

作极坐标换元

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

其中 $\frac{1}{k} \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, 则

$$\begin{aligned} \int_{B_1 - B_{1/k}} \ln\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}m &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{k}}^1 r\ln r\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{\ln k}{2k^2} + \frac{1}{4k^2} - \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \ln\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}m &= \lim_{k\to+\infty} \int_{B_1 - B_{1/k}} \ln\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}m \\ &= \lim_{k\to+\infty} 2\pi \cdot \left(\frac{\ln k}{2k^2} + \frac{1}{4k^2} - \frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4　2018 年真题

设 $\{X, \mathscr{A}, \mu\}$ 为测度空间, m 为 Lebesgue 测度, $B_r = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| < r\}$.

题目 1. (填空题) (1) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 为有理数集, 计算 $m(\mathbb{Q})$;
(2) 设 $\alpha > 1$, 计算 $\displaystyle\int_{[0,+\infty)} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}m$;
(3) 设 $f(x) = \sin \dfrac{1}{2} x$, 计算 $V(f; [0, \pi])$.

解答. (1) $m(\mathbb{Q}) = 0$;
(2) 计算得

$$\begin{aligned}\int_{[0,+\infty)} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}m &= \int_{[0,1)} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}m + \int_{[1,+\infty)} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}m \\ &\geq \int_{[0,1)} \frac{1}{x} \mathrm{d}m + \int_{[1,+\infty)} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}m \\ &= +\infty,\end{aligned}$$

因此 $\displaystyle\int_{[0,+\infty)} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}m = +\infty$;
(3) $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 单调, 因此 $V(f; [0, \pi]) = f(\pi) - f(0) = 1$.

题目 2. (判断题) (1) 区间 $(0, 1)$ 的势严格小于 $[0, 1]$ 的势;
(2) 如果 $A, B \in \mathscr{A}$, $\mu(A \Delta B) = 0$, 则 $\mu(A) = \mu(B)$;
(3) 如果 $f : [0, 1] \to [0, 1]$ 是 m-可测函数, 则 $f \in L^1([0, 1])$.

解答. (1) 错误, 一方面, 由 $(0, 1) \subset [0, 1]$ 知 $(0, 1)$ 的势小于等于 $[0, 1]$ 的势, 另外一方面, 由 $(0, 1)$ 的势等于 $(-1, 2)$ 的势知 $(0, 1)$ 的势大于等于 $[0, 1]$ 的势, 因此 $(0, 1)$ 的势等于 $[0, 1]$ 的势.
(2) 正确, 注意到 $A \Delta B = (A \cap B^C) + (B \cap A^C)$, 因此

$$0 = \mu(A \Delta B) = \mu(A \cap B^C) + \mu(B \cap A^C),$$

从而 $\mu(A \cap B^C) = \mu(B \cap A^C) = 0$. 计算得

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^C) = \mu(A \cap B),$$

同理 $\mu(B)=\mu(A\cap B)$, 因此 $\mu(A)=\mu(B)$.

(3) 此时

$$\int_{[0,1]}|f|\mathrm{d}m\leq\int_{[0,1]}1\mathrm{d}m=1<+\infty,$$

因此 $f\in L^1([0,1])$.

题目 3. 设 $f:[a,b]\to(-\infty,0)$ 连续, 记

$$G=\{(x,y):a<x<b,f(x)<y<0\},$$

证明: $m(G)=-\int_{[a,b]}f\mathrm{d}m$.

解答. 记 $g=-f$, 则

$$m(G)=\int_{[a,b]}g\mathrm{d}m=\int_{[a,b]}(-f)\mathrm{d}m=-\int_{[a,b]}f\mathrm{d}m.$$

题目 4. 设 $f\in L^p([a,b])$, $1<p<\infty$, 证明:

(1) $f\in L^1([a,b])$;

(2) $m(\{|f|>\alpha\})\leq\dfrac{\int_{[a,b]}|f|^p\mathrm{d}m}{\alpha^p},\quad\forall\alpha>0$.

解答. (1) 计算得

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}|f|\mathrm{d}m&=\int_{\{|f|\leq1\}}|f|\mathrm{d}m+\int_{\{|f|>1\}}|f|\mathrm{d}m\\&\leq m(\{|f|\leq1\})+\int_{\{|f|>1\}}|f|^p\mathrm{d}m\\&\leq(b-a)+\int_{[a,b]}|f|^p\mathrm{d}m\\&<+\infty,\end{aligned}$$

因此 $f\in L^1([a,b])$.

(2) 计算得

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}|f|^p\mathrm{d}m&=\int_{\{|f|\leq\alpha\}}|f|^p\mathrm{d}m+\int_{\{|f|>\alpha\}}|f|^p\mathrm{d}m\\&\geq0+\int_{\{|f|>\alpha\}}\alpha^p\mathrm{d}m\\&=\alpha^pm(\{|f|>\alpha\}).\end{aligned}$$

题目 5. 设 $f \in L^1(X)$, 证明: 存在函数列 $f_k \in L^1(X)$, f_k 有界, $k = 1, 2, \cdots$, 使得
(1) $\int_X |f_k - f| \mathrm{d}\mu \to 0$;
(2) f_k 依测度 μ 收敛于 f.

解答. (1) 令

$$f_n = \begin{cases} f, & |f| \le n, \\ 0, & |f| > n, \end{cases}$$

则 $|f_n| \le |f| = g$, 其中 $g \in L^1(X)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\int_X |f_k - f| \mathrm{d}\mu \to 0.$$

(2) 同样令

$$f_n = \begin{cases} f, & |f| \le n, \\ 0, & |f| > n, \end{cases}$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 由 f 有限, $m-$a.e. 知

$$\mu(|f_n - f| \ge \varepsilon) = \mu(\{f_n \ne f\}) = \mu(\{|f| > n\}) \to 0,$$

因此 f_n 依测度 μ 收敛于 f.

题目 6. 设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续函数, 证明:
(1) f 可微, $m-$a.e.;
(2) f' 有界, $m-$a.e..

解答. (1) 由 f 是 Lipschitz 函数知 f 是绝对连续函数, 因此 f 可微, $m-$a.e..
(2) 设对任意的 $x, y \in [a, b]$, $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$, 则有

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \le L.$$

若 $f'(x)$ 存在, 令 $y \to x$, 则有 $|f'(x)| \le L$, 从而 f' 有界, $m-$a.e..

题目 7. 记

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| = 1\},$$

证明: $m(S) = 0$.

解答. 首先, 根据 S 是闭集知 S 是 Lebesgue 可测集. 计算得

$$\begin{aligned}
m(S) &= \lim_{k\to+\infty} m\left(B_{1+\frac{1}{k}} - B_1\right) \\
&= m(B_1) \cdot \lim_{k\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^n - 1\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

5 2017 年真题

设 $\{X, \mathscr{A}, \mu\}$ 为测度空间, m 为 Lebesgue 测度, $B_r = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| < r\}$.

题目 1. (判断题) (1) 设 $A_k, A \in \mathscr{A}$, $k = 1, 2, \cdots$, 如果 A_k **单调**, $A_k \to A$, 则 $\mu(A_k) \to \mu(A)$;

(2) 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为 m-可测集, 如果 $m(A) = 0$**,** $B \subset A$, 则 B 为 m-可测集;

(3) 设 $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ 为 m-可测函数, 则 $\{|f| = +\infty\}$ 为 m-可测集;

(4) 设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 为 m-可测函数, 则存在连续函数 $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, 使得 g 与 f**m-几乎处处相等**;

(5) 设 $f_k, f : X \to \mathbb{R}$ 为 μ-可测函数, $k = 1, 2, \cdots$. 如果 f_k 依测度收敛到 f, 则 $f_k \to f$**,** $\mu - \text{a.e.}$;

(6) 设 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 为 μ-可测函数, $f = g, \mu - \text{a.e.}$, $f \in L^1(X)$, 则 $g \in L^1(X)$;

(7) 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$, 则 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x+t)\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}m$;

(8) 设 $f_k, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 为 m-可测函数, $k = 1, 2, \cdots$, $f_k \to f$. 如果存在常数 $M > 0$, 使得 $|f_k| \leq M, k = 1, 2, \cdots$, 则 $\displaystyle\int_a^b |f_k - f|\mathrm{d}m \to 0$;

(9) 设 $f \in L^1([a, b])$, 记 $g(x) = \displaystyle\int_a^x f\mathrm{d}m, x \in [a, b]$, 则 $g \in BV([a, b])$;

(10) 设 $f \in AC([a, b])$, 如果 $f'm$-几乎处处等于零, 则 $f(b) = f(a)$.

解答. (1) 错误, 设 $\{A_n\}$ 单调递减, 则还要求 $\mu(A_1) < +\infty$, 否则令 $A_n = \mathbb{R} - [-n, n]$, 则 $A_n \to A = \varnothing$, $\mu(A_n) = +\infty$, 但是 $\mu(A) = 0$.

(2) 正确, Lebesgue 测度具有完备性;

(3) 正确, 由 f 可测知 $\{|f| > n\} \in \mathscr{L}$, 因此

$$\{|f| = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{|f| > n\} \in \mathscr{L}.$$

(4) 错误, 记 $A = [0, 1) \cap \mathbb{Q} + [1, 2] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, $B = [0, 1) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) + [1, 2] \cap \mathbb{Q}$, 则 $[0, 1] = A + B$, $m(A) = m(B) = 1$, 定义

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in B, \end{cases}$$

则 f 是 $[0, 2]$ 上的 m-可测函数. 假设存在连续函数 g, 使得 $g = f, m - \text{a.e.}$,

(i) 若 $g(1) \notin \{0, 1\}$, 则存在 $\delta > 0$, 对任意的 $x \in B_\delta(1)$, $g(x) \notin \{0, 1\}$, 从而 $g(x) \neq f(x)$,

其中 $m(B_\delta(1)) \neq 0$, 此与 $g = f, m - \text{a.e.}$ 矛盾;

(ii) 若 $g(1) = 0$, 则存在 $\delta > 0$, 对任意的 $x \in (1-\delta, 1)$, $g(x) \neq 1$, 从而当 $x \in (1-\delta, 1) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ 时, $g(x) \neq f(x)$, 其中 $m((1-\delta, 1) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})) \neq 0$, 此与 $g = f, m - \text{a.e.}$ 矛盾;

(iii) 若 $g(1) = 1$, 同 (ii) 可推矛盾.

从而不存在连续函数 g, 使得 $g = f, m - \text{a.e.}$.

(5) 错误, 设 $2^m \leq n < 2^{m+1}$, 记 $k = n - 2^m$, 令

$$f_n = \begin{cases} 1, & x \in \left[\dfrac{k}{2^m}, \dfrac{k+1}{2^m}\right), \\ 0, & x \in [0,1] - \left[\dfrac{k}{2^m}, \dfrac{k+1}{2^m}\right), \end{cases}$$

记 $f = 0$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$,

$$m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = m(\{f_n = 1\}) = \frac{1}{2^m} \to 0,$$

因此 f_n 依测度收敛到 f, 但是对任意的 $x \in [0,1] - \mathbb{Q}$, 对任意的 $m \in \mathbb{N}$, 都存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in \left[\dfrac{k}{2^m}, \dfrac{k+1}{2^m}\right)$, 从而可以选出子列 $\{f_{n_k}\}$, 使 $f_{n_k}(x) = 1 \neq 0$. 故 f_n 不几乎处处收敛于 f. 甚至可以说, f_n 几乎处处不收敛于 f.

(6) 正确, 由 $f = g, \mu - \text{a.e.}$ 知

$$\int_X g \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu < +\infty,$$

因此 $g \in L^1(X)$.

(7) 正确, 令 $y = x + t$, 则

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+t) \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} f(y) \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}m.$$

(8) 正确, 根据 Lebesgue 控制收敛定理, 取 $g = M$ 即可. 事实上, 这个结论叫作 Lebesgue 有界收敛定理.

(9) 正确, 此时 $g(x) \in AC([a,b]) \subset BV([a,b])$.

(10) 正确, 根据 Leibniz 公式得

$$f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f' \mathrm{d}m = 0,$$

因此 $f(a) = f(b)$.

题目 2. 设 $f \in L^1(X)$, 定义 $\lambda : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$, $\lambda(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu$, $\forall E \in \mathscr{A}$.
(1) 证明: 存在测度 $\lambda^+, \lambda^- : \mathscr{A} \to [0, +\infty)$, 使得

$$\lambda(E) = \lambda^+(E) - \lambda^-(E), \quad \forall E \in \mathscr{A};$$

(2) 证明: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得: 如果 $E \in \mathscr{A}$ 满足 $\mu(E) < \delta$, 则 $|\lambda(E)| < \varepsilon$.

解答. (1) 记 $f = f^+ - f^-$, 令

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ \mathrm{d}\mu, \quad \lambda^-(E) = \int_E f^- \mathrm{d}\mu,$$

其中 $f \in L^1(X)$, 则 $\lambda^+, \lambda^- < +\infty$ 且为测度, $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$.
(2) 由积分的绝对连续性, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 对任意的 $E \in \mathscr{A}$, $\mu(E) < \delta$, 都有

$$|\lambda(E)| = \left| \int_E f \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_E |f| \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

题目 3. 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 m-可测函数, 证明:
(1) 如果 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $\lim\limits_{k \to +\infty} m(\{|f| > k\}) = 0$;
(2) 如果 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $\lim\limits_{k \to +\infty} \int_{\{|f|>k\}} |f| \mathrm{d}m = 0$;
(3) 如果 $f \geq 0$, 则 $\lim\limits_{k \to +\infty} \int_{B_k} f \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}m$.

解答. (1) 此时 $\int_{\mathbb{R}^n} |f| \mathrm{d}m < +\infty$, 计算得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f| \mathrm{d}m &= \int_{|f| \leq k} |f| \mathrm{d}m + \int_{|f|>k} |f| \mathrm{d}m \\ &> 0 + k \cdot m(\{|f| > k\}) \\ &= k \cdot m(\{|f| > k\}). \end{aligned}$$

所以

$$m(\{|f| > k\}) \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |f| \mathrm{d}m}{k} \to 0.$$

(2) 根据积分的区域可加性, 只需证明

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\{|f|\le k\}}|f|\mathrm{d}m=\int_{\mathbb{R}^n}|f|\mathrm{d}m.$$

由 Levi 单调收敛定理得

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\int_{\{|f|\le k\}}|f|\mathrm{d}m&=\int_{\mathbb{R}^n}|f|\chi_{\{|f|\le k\}}\mathrm{d}m\\&\to\int_{\mathbb{R}^n}|f|\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

或是根据 $\lim\limits_{k\to+\infty}m(\{|f|>k\})=0$, 直接应用积分的绝对连续性即可.

(3) 由 Levi 单调收敛定理得

$$\begin{aligned}\int_{B_k}f\mathrm{d}m&=\int_{\mathbb{R}^n}f\chi_{B_k}\mathrm{d}m\\&\to\int_{\mathbb{R}^n}f\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

题目 4. 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为 m-可测函数, 满足

$$|f(x)|\le C(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{-\alpha},\quad\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $C>0$, $\alpha>1$ 为常数, 证明:

(1) $f\in L^1(B_1)$; (2) $f\in L^1(\mathbb{R}^2-B_1)$; (3) $f\in L^1(\mathbb{R}^2)$.

解答. (1) 当 $|\boldsymbol{x}|\le 1$ 时, 有 $|f(x)|\le C$, 因此 $f\in L^1(B_1)$.

(2) 当 $|\boldsymbol{x}|\ge 1$ 时, 有

$$\int_{\mathbb{R}^2-B_1}|f|\mathrm{d}m\le C\int_{\mathbb{R}^2-B_1}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{2\alpha}}<+\infty,$$

其中 $\alpha>1$, 因此 $f\in L^1(\mathbb{R}^2-B_1)$.

(3) 由积分的区域可加性知

$$\int_{\mathbb{R}^2}f\mathrm{d}m=\int_{B_1}f\mathrm{d}m+\int_{\mathbb{R}^2-B_1}f\mathrm{d}m<+\infty,$$

因此 $f\in L^1(\mathbb{R}^2)$.

题目 5. 设 $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ 连续, 证明:

$$\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}m=\int_0^{+\infty} m(\{f>t\})\mathrm{d}t.$$

解答. 记 $G=\{(x,y):x\in\mathbb{R},0\le y\le f(x)\}$, 考虑

$$m(G)=\int_{\mathbb{R}^2}\chi_G\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

根据 Fubini 定理, 一方面有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\chi_G\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{\mathbb{R}}\left\{\int_{\mathbb{R}}\chi_G\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}}\left\{\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

另外一方面有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\chi_G\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{\mathbb{R}}\left\{\int_{\mathbb{R}}\chi_G\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}}m(\{0<f(x)<y\})\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}m(\{f>t\})\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

因此 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}m=\int_0^{+\infty} m(\{f>t\})\mathrm{d}t.$

题目 6. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续函数, 即存在常数 $M>0$, 使得

$$|f(x)-f(y)|\le M|x-y|,\quad \forall x,y\in[a,b].$$

证明: (1) $f\in AC([a,b])$; (2) f' 有界, $m-\mathrm{a.e.}$; (3) $V(f)\le\displaystyle\int_a^b|f'|\mathrm{d}m.$

解答. (1) 对任意的 $\varepsilon>0$, 任取互不相交的 $(a_k,b_k)\subset[a,b](1\le k\le m)$, 令

$$\sum_{k=1}^m|b_k-a_k|<\frac{\varepsilon}{L},$$

由 f 是 Lipschitz 函数知

$$\sum_{k=1}^{m}|f(b_k)-f(a_k)|\le\sum_{k=1}^{m}L|b_k-a_k|<\varepsilon,$$

因此 $f\in AC([a,b])$.

(2) 由 f 是 Lipschitz 函数知

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\le L.$$

若 $f'(x)$ 存在, 令 $y\to x$, 则有 $|f'(x)|\le L$, 从而 f' 有界, $m-\text{a.e.}$.

(3) 设 $p=a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$, 由 Newton-Leibniz 公式得

$$\begin{aligned}V(f;p)&=\sum_{i=1}^{n}|f(a_i)-f(a_{i-1})|\\&=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}}f'\mathrm{d}m\right|\\&\le\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{a_{i+1}}|f'|\mathrm{d}m\\&=\int_a^b|f'|\mathrm{d}m,\end{aligned}$$

因此

$$V(f)=\sup_p V(f;p)\le\int_a^b|f'|\mathrm{d}m.$$

彩蛋：2021 年模拟题

本份题目不留详细的解答, 独立思考和尝试比详细的解答更重要. 同样设 $\{X,\mathscr{A},\mu\}$ 为测度空间, m 为 Lebesgue 测度.

题目 1. (判断题) (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-n,\dfrac{1}{n}\right)=(-\infty,0]$;

(2) $\mathbb{Q}$ 是可数集, 但是 $2^{\mathbb{Q}}$ 是不可数集;

(3) 设 $A\subset X$, 则 $\sigma(\{A\})=\{\varnothing,A,A^C,X\}$;

(4) 设 $A\in\mathscr{A}$, $\mu(A)=0$, 则对任意的 $B\subset A$, $\mu(B)=0$;

(5) 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 且 $f=g,m-\text{a.e.}$, 若 g 连续, 则 f 连续;

(6) 设 $A\in\mathscr{A}$, $f_n:A\to\mathbb{R}$ 是 μ-可测函数, $f=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n$, 则 f 也是 μ-可测函数;

(7) 设 $A\in\mathscr{A}$, $f_n,f:A\to\mathbb{R}$ 是 μ-可测函数, $f_n\xrightarrow{\mu}f$, 则存在子列 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $f_{n_k}\to f,\mu-\text{a.e.}$;

(8) 设 $A\in\mathscr{A}$, $f_n,f\in L^1(A)$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n=f$, 若存在 $M>0$, 使得 $|f_n|\le M$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_A f_n\mathrm{d}\mu=\int_A f\mathrm{d}\mu$;

(9) 设 $f\in L^1([a,b])$, $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(x)\in AC([a,b])$;

(10) $C([a,b])\subset AC([a,b])\subset BV([a,b])$.

解答. (1) 对; (2) 对; (3) 对; (4) 错; (5) 错; (6) 对; (7) 对; (8) 错; (9) 对; (10) 错.

题目 2. 设 $A\subset\mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测集, $0<a<m(A)$, 则存在 Lebesgue 可测集 $B\subset A$, 使得 $m(B)=a$.

解答. 构造函数 $f(x)=m(A\cap(-\infty,x])$.

题目 3. 设 $A\in\mathscr{A}$, $f:A\to[0,+\infty]$ 是 μ-可测函数, 且 $f\in L^1(A)$, 定义

$$f_n=\begin{cases}f, & f\le n,\\ 0, & f>n,\end{cases}$$

证明：(1) f_n 是 μ-可测函数; (2) $f_n\xrightarrow{\mu}f$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_A f_n\mathrm{d}\mu=\int_A f_n\mathrm{d}\mu$.

解答. 略.

题目 4. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续函数, 也即对任意的 $x,y\in[a,b]$, 都有

$$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|.$$

证明：(1) $f\in L^1([a,b])$; (2) $f\in BV([a,b])$, 且 $V(f)\leq L(b-a)$;
(3) f 可微, $m-\text{a.e.}$, 且 f' 有界, $m-\text{a.e.}$.

解答. 略.

题目 5. 设 $A\in\mathscr{A}$, $f_n:A\to\mathbb{R}$ 是 μ-可测函数, 证明：(1) 若存在 $g\in L^1(A)$, 使得 $f_n\geq g, n=1,2,\cdots$, 则 $\liminf\limits_{n\to+\infty}f_n\in L^1(A)$, 且

$$\int_A(\liminf_{n\to+\infty}f_n)\mathrm{d}\mu\leq\liminf_{n\to+\infty}\int_A f_n\mathrm{d}\mu;$$

(2) 若存在 $g\in L^1(A)$, 使得 $f_n\leq g, n=1,2,\cdots$, 则 $\limsup\limits_{n\to+\infty}\in L^1(A)$, 且

$$\int_A(\limsup_{n\to+\infty}f_n)\mathrm{d}\mu\geq\limsup_{n\to+\infty}\int_A f_n\mathrm{d}\mu.$$

解答. 略.

题目 6. 设 $A\in\mathscr{A}$, $f_n,f:A\to\mathbb{R}$ 是 μ-可测函数, 证明：
(1) 若 $f_n\xrightarrow{\mu}f$, 且 $f_n\xrightarrow{\mu}g$, 则 $f=g,\mu-\text{a.e.}$;
(2) 设 $\mu(A)<+\infty$, 则 $f_n\to f,\mu-\text{a.e.}$ 当且仅当 $\sup\limits_{k\geq n}|f_k-f|\xrightarrow{\mu}0$.

解答. (1) 略; (2) 表 $\left\{\sup\limits_{k\geq n}|f_k-f|>\varepsilon\right\}=\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty}\{|f_k-f|>\varepsilon\}$.

题目 7. 设 C 是 Cantor 集, 证明：(1) $m(C)=0$; (2) C 与 $\mathbb{R}$ 等势; (3) $\chi_C\notin BV([0,1])$.

解答. (1) 略; (2) 设 $x\in C$, 表 $x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{3^n}$, 其中 $a_n\in\{0,2\}$;
(3) 存在分划 $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$, 使 $x_{2n}\in C,x_{2n+1}\notin C$.