数理统计速成
(第二版)

统计 91 董晟渤

2022 年 2 月 16 日

说明

正文中, ♦ 代表知识点, ♠ 代表示例, ♣ 代表命题, **粗体**代表概念. 本资料首发于https://dylandong.top/, 更多资料请访问网站下载.

目录

1 统计量及其分布

1.1 基本概念

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 $f(x;\theta)$ 的样本.

♦ (统计量) 若 $T = T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 θ 无关, 则称 T 为**统计量**.

♦ (样本均值) 统计量

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

称为**样本均值**.

♦ (样本方差) 统计量

$$s_n^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

称为**样本方差**. 另外, 统计量

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$$

称为**样本 (无偏) 方差**, 设总体的方差为 σ, 则 $\mathbb{E}s^2 = \sigma^2$.

♦ (样本矩、样本偏度与样本峰度) 设 k 是正整数, 统计量

$$a_k = \frac{x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k}{n} \quad \text{和} \quad b_k = \frac{(x_1 - \bar{x})^k + (x_2 - \bar{x})^k + \cdots + (x_n - \bar{x})^k}{n}$$

分别称为**样本 k 阶原点矩**和**样本 k 阶中心矩**.

♦ (样本偏度与样本峰度) 统计量

$$\hat{\beta}_s = \frac{b_3}{b_2^{\frac{3}{2}}} \quad \text{和} \quad \hat{\beta}_k = \frac{b_4}{b_2^2} - 3$$

分别称为**样本偏度**和**样本峰度**. $\hat{\beta}_s$ 反映了样本数据与对称性的偏离程度和偏离方向:

- 若 $\hat{\beta}_s = 0$, 则样本是对称的;

- 若 $\hat{\beta}_s > 0$, 则样本的右尾长, 样本右偏;
- 若 $\hat{\beta}_s < 0$, 则样本的左尾长, 样本左偏.

$\hat{\beta}_k$ 反应了总体分布密度曲线在其峰值附近的陡峭程度和尾部粗细:

- 若 $\hat{\beta}_k = 0$, 则样本接近标准正态分布;
- 若 $\hat{\beta}_k > 0$, 则样本在峰值附近比 $\mathcal{N}(0,1)$ 更陡, 尾部更细;
- 若 $\hat{\beta}_k < 0$, 则样本在峰值附近比 $\mathcal{N}(0,1)$ 更缓, 尾部更粗.

♦ (样本次序统计量) 将 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 排列后得到 $x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(n)}$, 称为**样本次序统计量**. 设总体的密度为 $p(t)$, 分布函数为 $F(t)$, 则第 k 个次序统计量 $x_{(k)}$ 的密度为

$$p_k(t) = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot (F(t))^{k-1} \cdot (1-F(t))^{n-k} \cdot p(t).$$

特别地, $p_1(t) = n \cdot (1-F(t))^{n-1} \cdot p(t)$, $p_n(t) = n \cdot F^{n-1}(t) \cdot p(t)$.

♦ (样本分位数) 设 $0 < p < 1$, 统计量

$$m_p = \begin{cases} x_{([np+1])}, & \text{若 } np \text{ 不是整数}, \\ \dfrac{1}{2}\left(x_{(np)} + x_{(np+1)}\right), & \text{若 } np \text{ 是整数} \end{cases}$$

称为**样本 p 分位数**, 样本 $\frac{1}{2}$ 分位数称为**样本中位数**.

以下设 $T = T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是统计量.

♦ (充分统计量) 若在给定 T 的条件下, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的条件分布与 θ 无关, 则称 T 为**充分统计量**.

♣ (因子分解定理) 统计量 $T = T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为充分统计量当且仅当存在两个函数 $g(t, \theta)$ 和 $h(x)$, 使得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = g(T(x_1, x_2, \cdots, x_n), \theta) \cdot h(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

♠ (正态分布的充分统计量) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则 $(\bar{x}, s^2)$ 是充分统计量.

1.2 三大抽样分布

如无特殊说明, 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 是来自总体 $\mathcal{N}(0,1)$ 的两个相互独立的样本.

♦ (χ^2 分布) 统计量

$$\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \sim \chi^2(n),$$

称为**自由度为 n 的 χ^2 分布**. 其密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 2^{\frac{n}{2}}} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0,$$

期望为 n, 方差为 $2n$. 记其 $1-\alpha$ 分位数为 $\chi^2_{1-\alpha}(n)$.

♣ $\chi^2(n) = \mathrm{Ga}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 从而 χ^2 分布是 Gamma 分布的特殊情况.

♠ (正态分布与 χ^2 分布的关系) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

♦ (F 分布) 统计量

$$F = \frac{(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2)/m}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)/n} \sim F(m,n),$$

称为**自由度为 m 和 n 的 F 分布**. 其密度函数为

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{m}{2}-1} \cdot \left(1 + \frac{m}{n} \cdot x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, \quad x > 0,$$

期望为 $\frac{n}{n-2} (n > 2)$, 方差为 $\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} (n > 4)$. 记其 $1-\alpha$ 分位数为 $F_{1-\alpha}(m,n)$, 则有

$$F_{1-\alpha}(m,n) = \frac{1}{F_\alpha(n,m)}$$

♠ (正态分布与 F 分布的关系) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n \sim$

$\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 是相互独立的样本, 则

$$F = \frac{\sigma_2^2 \cdot s_x^2}{\sigma_1^2 \cdot s_y^2} \sim F(m-1, n-1).$$

♦ (t 分布) 统计量

$$t = \frac{y_1}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)/n}} \sim t(n),$$

称为**自由度为 n 的 t 分布**. 其密度函数为

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

期望为 $0(n > 1)$, 方差为 $\dfrac{n}{n-2}(n > 2)$. 记其 $1-\alpha$ 分位数为 $t_{1-\alpha}(n)$, 则有

$$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n).$$

♠ (正态分布与 t 分布的关系) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则

$$t = \frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{x} - \mu)}{s} \sim t(n-1).$$

♠ (正态分布与 t 分布的关系) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ 是相互独立的样本, 记

$$s_w^2 = \frac{(m-1) \cdot s_x^2 + (n-1) \cdot s_y^2}{m+n-2},$$

则

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_w \cdot \sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}} \sim t(m+n-2).$$

2 参数估计

2.1 点估计

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 $f(x;\theta)$ 样本.

♦ (点估计) 用于估计 θ 的统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 θ 的**点估计**.

设 $\hat{\theta}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_n, \cdots$ 是 θ 的点估计.

♦ (无偏估计与有效性) 若 $\mathbb{E}\hat{\theta} = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 是**无偏估计**. 若 $\mathbb{E}\hat{\theta}_n \to \theta$, 则称 $\hat{\theta}_n$ 是**渐进无偏估计**. 设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是无偏估计, 若 $\mathrm{Var}\hat{\theta}_1 \leq \mathrm{Var}\hat{\theta}_2$, 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更**有效**.

♦ (相合估计与渐近正态性) 若 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$, 则称 $\hat{\theta}_n$ 是**相合估计**. 若 $E\hat{\theta}_n \to \theta$, $\mathrm{Var}\hat{\theta}_n \to 0$, 则 $\hat{\theta}_n$ 是相合估计. 设 $\hat{\theta}_n$ 是相合估计, 若存在 $\{\sigma_n(\theta)\}$, 使得

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma_n(\theta)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1),$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 具有**渐近正态性**.

以下设总体的概率函数 (概率分布列或概率密度函数) 为 $p(x;\theta)$, 以下是一些做点估计的方法.

♦ (矩估计) 所谓的**矩估计**, 指的是: 用样本矩替换总体矩, 用样本矩的函数替换总体矩的函数. 这里的矩可以是原点矩或中心矩.

♦ (最大似然估计) 函数

$$L(\theta) = p(x_1;\theta) \cdot p(x_2;\theta) \cdots p(x_n;\theta) \quad \text{和} \quad \ln L(\theta)$$

分别称为**似然函数**和**对数似然函数**. 如果 $L(\hat{\theta}) = \max\limits_{\theta \in \Theta} L(\theta)$, 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**最大似然估计**. 通常通过对对数似然函数求导来求最大似然估计.

♠ (正态分布的最大似然估计) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_N \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则参数 μ 和 σ^2 的最大似然估计是 $\hat{\mu} = \bar{x}$ 和 $\hat{\sigma}^2 = s_n^2$.

♦ (一致最小均方误差估计) 记**均方误差** $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \theta)^2$, 则

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = \mathrm{Var}\hat{\theta} + (\mathbb{E}\hat{\theta} - \theta)^2.$$

若对其他的 θ 的估计 $\tilde{\theta}$, 都有

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) \leq \mathrm{MSE}(\tilde{\theta}),$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**一致最小均方误差估计**.

♦ (一致最小方差无偏估计, 也即 UMVUE) 设 $\hat{\theta}$ 是无偏估计, 若对其他的 θ 的无偏估计 $\tilde{\theta}$, 都有

$$\mathrm{Var}\hat{\theta} \leq \mathrm{Var}\tilde{\theta},$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**一致最小方差无偏估计**, 也即 UMVUE. 其其实是无偏估计的一致最小均方误差估计.

♣ (UMVUE 的判断) 设 $\hat{\theta}$ 是无偏估计, $\mathrm{Var}\hat{\theta} < \infty$, 则 $\hat{\theta}$ 是 UMVUE 的充要条件是, 对任意一个满足

$$\mathbb{E}\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad \text{和} \quad \mathrm{Var}\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) < \infty$$

的 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 有 $\mathrm{Cov}(\hat{\theta}, \varphi) = 0$.

♣ (充分性原则) 设 $\hat{\theta}$ 是无偏估计, $T = T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是充分统计量, 则 $\tilde{\theta} = \mathbb{E}(\hat{\theta}|T)$ 是无偏估计, 且 $\tilde{\theta}$ 比 $\hat{\theta}$ 更有效.

♦ (Fisher 信息量) 称

$$I(\theta) = \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x;\theta)\right]^2 = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x;\theta)\right]$$

为总体的 **Fisher 信息量**.

♣ (Cramer-Rao 不等式) 设 $T = T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计, 则

$$\mathrm{Var}T \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{n \cdot I(\theta)}.$$

特别地, 对 θ 的无偏估计 $\hat{\theta}$, 有 $\mathrm{Var}\hat{\theta} \geq \dfrac{1}{n \cdot I(\theta)}$. 若上式等式成立, 则称 T 是 $g(\theta)$ 的**有效估计**. 有效估计一定是 UMVUE.

♦ (Bayes 估计) 设参数 θ 的**先验分布**为 $\pi(\theta)$, **联合条件概率**为

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n|\theta_0) = p(x_1;\theta_0) \cdot p(x_2;\theta_0) \cdots p(x_n;\theta_0),$$

则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 θ 的**联合分布**

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta) = p(x_1, x_2, \cdots, x_n|\theta)\pi(\theta),$$

并且 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的**边缘分布**

$$m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_\Theta h(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta)\mathrm{d}\theta,$$

从而 θ 的**后验分布**

$$\begin{aligned}\pi(\theta|x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \frac{h(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta)}{m(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \\ &= \frac{p(x_1, x_2, \cdots, x_n|\theta)\pi(\theta)}{\displaystyle\int_\Theta p(x_1, x_2, \cdots, x_n|\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta}.\end{aligned}$$

这称为参数 θ 的**后验分布**. 由后验分布估计 θ 有三种常用的方法:

- 使用后验分布的密度函数最大值点作为 θ 的点估计的**最大后验估计**;
- 使用后验分布的中位数作为 θ 的点估计的**后验中位数估计**;
- 使用后验分布的均值作为 θ 的点估计的**后验期望估计**.

如果 $\pi(\theta)$ 和 $\pi(\theta|x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是同一种分布, 则称该分布为**共轭先验分布**.

2.2 区间估计

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 $f(x;\theta)$ 样本.

♦ (置信区间) 若存在统计量 $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 使得

$$\mathbb{P}\left(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U\right) \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称区间 $\left[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right]$ 为置信水平为 $1-\alpha$ 的**置信区间**. 若上式等式成立, 则称区间 $\left[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right]$ 为置信水平为 $1-\alpha$ 的**同等置信区间**.

♦ (置信下限与上限) 若存在统计量 $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 使得

$$\mathbb{P}\left(\hat{\theta}_L \le \theta\right) \ge 1-\alpha \quad \text{或} \quad \mathbb{P}\left(\theta \le \hat{\theta}_U\right) \ge 1-\alpha, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称 $\hat{\theta}_L$ 和 $\hat{\theta}_R$ 分别为置信水平为 $1-\alpha$ 的**置信下限**和**置信上限**. 若上式等式成立, 则称 $\hat{\theta}_L$ 和 $\hat{\theta}_R$ 分别为置信水平为 $1-\alpha$ 的**同等置信下限**和**同等置信上限**.

♦ (枢轴量) 若存在函数 $G = G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 使得 G 的分布与 θ 无关, 则称 G 为**枢轴量**. 通常使用枢轴量法求置信区间: 只需要适当地取两个常数 c, d , 使得

$$\mathbb{P}(c \le G \le d) = 1-\alpha,$$

再对不等式 $c \le G \le d$ 变形得到 $\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U$, 就可以得到置信区间 $\left[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right]$.

♠ (单个正态总体, 方差已知时均值的置信区间) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 若 σ 已知, 则取枢轴量

$$G = \frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{x}-\mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

从而 μ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间为

$$\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right].$$

♠ (单个正态总体, 方差未知时均值的置信区间) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 若 σ 未知, 则取枢轴量

$$G = \frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{x}-\mu)}{s} \sim t(n-1),$$

从而 μ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间为

$$\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right].$$

♠ (单个正态总体, 方差的置信区间) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则取枢轴量

$$G = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

从而 σ^2 的 $1-\alpha$ 同等置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right].$$

♠ (大样本置信区间) 设 n 充分大, $x_1, x_2, \cdots, x_n \sim \mathcal{B}(1,p)$, 则取枢轴量

$$G = \frac{\sqrt{n}\cdot(\bar{x}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

从而 p 的 $1-\alpha$ 同等置信区间为

$$\left[\bar{x} - \sqrt{\frac{\bar{x}\cdot(1-\bar{x})}{n}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \sqrt{\frac{\bar{x}\cdot(1-\bar{x})}{n}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right].$$

♠ (两个正态总体, σ_1^2 和 σ_2^2 已知时均值差的置信区间) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 是相互独立的样本, 则取枢轴量

$$G = \frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

从而 $\mu_1-\mu_2$ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间为

$$\left[\bar{x}-\bar{y} - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x}-\bar{y} + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right].$$

♠ (两个正态总体, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 未知时均值差的置信区间) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ 是相互独立的样本, 记

$$s_w^2 = \frac{(m-1)\cdot s_x^2 + (n-1)\cdot s_y^2}{m+n-2},$$

则取枢轴量

$$G = \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2),$$

从而 $\mu_1-\mu_2$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{x}-\bar{y} - \sqrt{\frac{m+n}{mn}}\cdot s_w\cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{x}-\bar{y} + \sqrt{\frac{m+n}{mn}}\cdot s_w\cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right].$$

♠ (两个正态总体, 方差比已知时均值差的置信区间) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 是相互独立的样本, 且 $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = c$ 已知, 记

$$s_w^2 = \frac{(m-1)\cdot s_x^2 + (n-1)\cdot \dfrac{s_y^2}{c}}{m+n-2},$$

则取枢轴量

$$G = \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_w \cdot \sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{c}{n}}} \sim t(m+n-2),$$

从而 $\mu_1 - \mu_2$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{x}-\bar{y}-\sqrt{\frac{mc+n}{mn}}\cdot s_w \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{x}-\bar{y}+\sqrt{\frac{mc+n}{mn}}\cdot s_w \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right].$$

♠ (两个正态总体, 大样本置信区间) 设 m, n 充分大, $x_1, x_2, \cdots, x_m \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 是相互独立的样本, 则取枢轴量

$$G = \frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{m}+\dfrac{s_y^2}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

从而 $\mu_1 - \mu_2$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{x}-\bar{y}-\sqrt{\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x}-\bar{y}+\sqrt{\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right].$$

♠ (两个正态总体, 均值差的近似置信区间) 设 m, n 不是很大, $x_1, x_2, \cdots, x_m \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 是相互独立的样本, 记

$$s_0^2 = \frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}, \quad l = \frac{s_0^4}{\dfrac{s_x^4}{m^2(m-1)}+\dfrac{s_y^4}{n^2(n-1)}},$$

则取枢轴量

$$G = \frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{s_0} \sim t(l),$$

从而 $\mu_1 - \mu_2$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{x}-\bar{y}-s_0\cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}(l), \bar{x}-\bar{y}+s_0\cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}(l)\right]$$

♠ (两个正态总体, 方差比的置信区间) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 是相互独立的样本, 则取枢轴量

$$G = \frac{\sigma_2^2 \cdot s_x^2}{\sigma_1^2 \cdot s_y^2} \sim F(m-1, n-1),$$

从而 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)}, \frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)}\right].$$

3 假设检验

3.1 参数假设检验

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 $f(x;\theta)$ 的样本.

♦ (假设检验) 设 $\varnothing \neq \Theta_0 \subset \Theta$, 则命题 $H_0: \theta \in \Theta_0$ 称为**原假设**, 若另有 $\varnothing \neq \Theta_1 \subset \Theta$, 且 $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$, 则命题 $H_1: \theta \in \Theta_1$ 称为**备择假设**. 我们感兴趣的一对假设是

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta \in \Theta_1,$$

称其为 H_0 对 H_1 的**假设检验**. 如果 $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, 则称 H_0 为**简单原假设**, 否则称 H_0 为**复合原假设**. 当 H_0 为简单原假设时, $H_0: \theta = \theta_0$, 此时备择假设可能为

$$H_1: \theta \neq \theta_0, \quad H_1: \theta < \theta_0, \quad H_1: \theta > \theta_0,$$

前者称为**双边假设**, 后凉者称为**单边假设**.

♦ (拒绝域与错误的类型) 若当 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W$ 时拒绝原假设, 否则接受原假设, 则称 W 为检验的**拒绝域**. 若 H_0 为真, 但是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W$, 称这样的错误为**第一类错误**; 若 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \notin W$, 但 H_0 为假, 称这样的错误为**第二类错误**.

错误的类型	H_0 为真	H_0 为假
$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W$	第一类错误	正确
$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \notin W$	正确	第二类错误

♦ (势函数) 设检验问题

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta \in \Theta_1$$

的拒绝域为 W, 称

$$g(\theta) = \mathbb{P}\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W\}$$

为该检验的**势函数**. 设犯第一类错误的概率为 $\alpha(\theta)(\theta \in \Theta_0)$, 犯第二类错误的概率为 $\beta(\theta)(\theta \in \Theta_1)$, 则

$$g(\theta) = \begin{cases} \alpha(\theta), & \theta \in \Theta_0, \\ 1 - \beta(\theta), & \theta \in \Theta_1. \end{cases}$$

通常无法使一个检验同时犯第一类错误和第二类错误的概率同时减小, 从而往往只考虑控制犯第一类错误的概率.

♦ (显著性水平与 p 值) 设检验问题

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

的势函数为 $g(\theta)$, 如果对任意的 $\theta \in \Theta_0$, 都有 $g(\theta) \leq \alpha$, 则称该检验是**显著性水平**为 α 的显著性检验. 利用样本能够作出拒绝原假设的最小显著性水平称为检验的 p **值**.

♠ (单个正态总体, 均值的假设检验) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 考虑关于 μ 的检验问题

$$\begin{cases} \text{I} & H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0, \\ \text{II} & H_0 : \mu \geq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu < \mu_0, \\ \text{III} & H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0, \end{cases}$$

其中 I 和 II 是单侧检验, III 是双侧检验, 则结果如下表.

方法	H_0	H_1	检验统计量	拒绝域	p 值
u 检验 (σ^2 已知)	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$u = \dfrac{\sqrt{n} \cdot (\bar{x} - \mu_0)}{\sigma}$	$\{u \geq u_{1-\alpha}\}$	$1 - \Phi(u_0)$
	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$\{u \leq u_\alpha\}$	$\Phi(u_0)$
	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$		$\{\lvert u \rvert \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2(1 - \Phi(u_0))$
t 检验 (σ^2 未知)	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$t = \dfrac{\sqrt{n} \cdot (\bar{x} - \mu_0)}{s}$	$\{t \geq t_{1-\alpha}(n-1)\}$	$\mathbb{P}(t \geq t_0)$
	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$\{t \leq t_\alpha(n-1)\}$	$\mathbb{P}(t \leq t_0)$
	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$		$\{\lvert t \rvert \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$	$\mathbb{P}(\lvert t \rvert \geq \lvert t_0 \rvert)$

其中, 对于 u 检验, u_0 表示代入样本值计算的结果; 对于 t 检验, t_0 表示带入样本值计算的结果, 且 $t \sim t(n-1)$.

♠ (两个正态总体, 均值差的检验) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 是相互独立的样本, 考虑关于 μ_1, μ_2 的检验问题

$$\begin{cases} \text{I} \quad H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu_1 > \mu_2, \\ \text{II} \quad H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu_1 < \mu_2, \\ \text{III} \quad H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2, \end{cases}$$

其中 I 和 II 是单侧检验, III 是双侧检验, 则结果如下表.

方法	H_0	H_1	检验统计量	拒绝域	p 值
u 检验 (σ_1^2, σ_2^2 已知)	$\mu_1 \leq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 \leq \mu_2$ $\mu_1 \neq \mu_2$	$u = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m} + \dfrac{\sigma_2^2}{n}}}$	$\{u \geq u_{1-\alpha}\}$ $\{u \leq u_\alpha\}$ $\{\lvert u\rvert \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$1 - \Phi(u_0)$ $\Phi(u_0)$ $2(1 - \Phi(u_0))$
t 检验 ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 未知)	$\mu_1 \leq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 \leq \mu_2$ $\mu_1 \neq \mu_2$	$t = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \cdot \sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}}$	$\{t \geq t_{1-\alpha}(l)\}$ $\{t \leq t_\alpha(l)\}$ $\{\lvert t\rvert \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(l)\}$	$\mathbb{P}(t \geq t_0)$ $\mathbb{P}(t \leq t_0)$ $\mathbb{P}(\lvert t\rvert \geq \lvert t_0\rvert)$
大样本 u 检验 (m, n 充分大)	$\mu_1 \leq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 \leq \mu_2$ $\mu_1 \neq \mu_2$	$u = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{m} + \dfrac{s_y^2}{n}}}$	$\{u \geq u_{1-\alpha}\}$ $\{u \leq u_\alpha\}$ $\{\lvert u\rvert \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$1 - \Phi(u_0)$ $\Phi(u_0)$ $2(1 - \Phi(u_0))$
近似 t 检验 (m, n 不是很大)	$\mu_1 \leq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 \leq \mu_2$ $\mu_1 \neq \mu_2$	$t = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{m} + \dfrac{s_y^2}{n}}}$	$\{t \geq t_{1-\alpha}(l)\}$ $\{t \leq t_\alpha(l)\}$ $\{\lvert t\rvert \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(l)\}$	$\mathbb{P}(t \geq t_0)$ $\mathbb{P}(t \leq t_0)$ $\mathbb{P}(\lvert t\rvert \geq \lvert t_0\rvert)$

其中, 对于 u 检验, u_0 表示代入样本值计算的结果; 对于 t 检验,

$$s_w^2 = \frac{(m-1) \cdot s_x^2 + (n-1) \cdot s_y^2}{m+n-2},$$

$l = m + n - 2$, t_0 表示带入样本值计算的结果, 且 $t \sim t(l)$; 对于大样本 u 检验, u_0 表示代入样本值计算的结果; 对于近似 t 检验,

$$s_0^2 = \frac{s_x^2}{m} + \frac{s_y^2}{n}, \quad l = \frac{s_0^4}{\dfrac{s_x^4}{m^2(m-1)} + \dfrac{s_y^4}{n^2(n-1)}},$$

t_0 表示带入样本值计算的结果, 且 $t \sim t(l)$.

♠ (单个正态总体, 方差的 χ^2 检验) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 考虑关于 σ^2 的检验问题

$$\begin{cases} \mathrm{I} & H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2, \\ \mathrm{II} & H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2, \\ \mathrm{III} & H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma^2 \ne \sigma_0^2, \end{cases}$$

其中 I 和 II 是单侧检验, III 是双侧检验, 取检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2},$$

则当 $\sigma = \sigma_0$ 时, $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$. 若检验的显著性水平为 α, 则对应三个检验的拒绝域分别为

$$\begin{cases} W_{\mathrm{I}} = \{\chi^2 \ge \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}, \\ W_{\mathrm{II}} = \{\chi^2 \le \chi^2_{\alpha}(n-1)\}, \\ W_{\mathrm{III}} = \{\chi^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} \cup \{\chi^2 \ge \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}. \end{cases}$$

设 χ_0^2 为代入样本值计算的结果, 则对应三个检验的 p 值分别为

$$\begin{cases} p_{\mathrm{I}} = \mathbb{P}(\chi^2 \ge \chi_0^2), \\ p_{\mathrm{II}} = \mathbb{P}(\chi^2 \le \chi_0^2), \\ p_{\mathrm{III}} = 2\min\{\mathbb{P}(\chi^2 \ge \chi_0^2), \mathbb{P}(\chi^2 \le \chi_0^2)\}. \end{cases}$$

♠ (两个正态总体, 方差比的 F 检验) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 是相互独立的样本, 考虑关于 σ_1^2, σ_2^2 的检验问题

$$\begin{cases} \mathrm{I} & H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2 \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2, \\ \mathrm{II} & H_0: \sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2, \\ \mathrm{III} & H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2, \end{cases}$$

其中 I 和 II 是单侧检验, III 是双侧检验, 取检验统计量

$$F = \frac{s_x^2}{s_y^2},$$

则当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时, $F\sim F(m-1,n-1)$. 若检验的显著性水平为 α, 则对应三个检验的拒绝域分别为

$$\begin{cases} W_{\mathrm{I}}=\{F\geq F_{1-\alpha}(m-1,n-1)\}, \\ W_{\mathrm{II}}=\{F\geq F_{\alpha}(m-1,n-1)\}, \\ W_{\mathrm{III}}=\{F\geq F_{1-\alpha}(m-1,n-1)\}\cup\{F\geq F_{\alpha}(m-1,n-1)\}. \end{cases}$$

设 F_0 为代入样本值计算的结果, 则对应三个检验的 p 值分别为

$$\begin{cases} p_{\mathrm{I}}=\mathbb{P}(F\geq F_0), \\ p_{\mathrm{II}}=\mathbb{P}(F\leq F_0), \\ p_{\mathrm{III}}=2\min\{\mathbb{P}(F\geq F_0),\mathbb{P}(F\leq F_0)\}. \end{cases}$$

♠ (指数分布总体的 χ^2 检验) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\sim \mathrm{Exp}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$, 其均值为 θ, 考虑关于 θ 的假设检验问题

$$\begin{cases} \mathrm{I} \quad H_0:\theta\leq\theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1:\theta>\theta_0, \\ \mathrm{II} \quad H_0:\theta\geq\theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1:\theta<\theta_0, \\ \mathrm{III} \quad H_0:\theta=\theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1:\theta\neq\theta_0, \end{cases}$$

其中 I 和 II 是单侧检验, III 是双侧检验, 取检验统计量

$$\chi^2=\frac{2n\bar{x}}{\theta_0},$$

则当 $\theta=\theta_0$ 时, $\chi^2\sim\chi^2(2n)$, 若检验的显著性水平为 α, 则对应三个检验的拒绝域分别为

$$\begin{cases} W_{\mathrm{I}}=\{\chi^2\geq\chi^2_{1-\alpha}(2n)\}, \\ W_{\mathrm{II}}=\{\chi^2\leq\chi^2_{\alpha}(2n)\}, \\ W_{\mathrm{III}}=\{\chi^2\leq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)\}\cup\{\chi^2\geq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)\}. \end{cases}$$

设 χ_0^2 为代入样本值计算的结果, 则对应三个检验的 p 值分别为

$$\begin{cases} p_{\mathrm{I}}=\mathbb{P}(\chi^2\geq\chi_0^2), \\ p_{\mathrm{II}}=\mathbb{P}(\chi^2\leq\chi_0^2), \\ p_{\mathrm{III}}=2\min\{\mathbb{P}(\chi^2\geq\chi_0^2),\mathbb{P}(\chi^2\leq\chi_0^2)\}. \end{cases}$$

♠ (比率检验) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \sim \mathcal{B}(1,p)$, 考虑关于 p 的假设检验问题

$$\begin{cases} \text{I} \quad H_0: p \leq p_0 \quad \text{vs} \quad H_1: p > p_0, \\ \text{II} \quad H_0: p \geq p_0 \quad \text{vs} \quad H_1: p < p_0, \\ \text{III} \quad H_0: p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_1: p \neq p_0, \end{cases}$$

其中 I 和 II 是单侧检验, III 是双侧检验, 取检验统计量

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

则当 $p = p_0$ 时, $x \sim \mathcal{B}(n, p_0)$. 此时使用 p 值进行检验更加方便, 设 x_0 为代入样本值计算的结果, 则对应三个检验的 p 值分别为

$$\begin{cases} p_{\text{I}} = \mathbb{P}(x \geq x_0), \\ p_{\text{II}} = \mathbb{P}(x \leq x_0), \\ p_{\text{III}} = 2\min\{\mathbb{P}(x \leq x_0), \mathbb{P}(x \geq x_0)\}. \end{cases}$$

设检验的显著性水平为 α, 若 $p > \alpha$, 则接受原假设, 否则拒绝原假设.

♠ (大样本的 u 检验) 设 n 充分大, $x_1, x_2, \cdots, x_n \sim f(x;\theta)$, 总体的均值为 θ, 方差为 $\sigma^2(\theta)$, 考虑关于 θ 的假设检验问题

$$\begin{cases} \text{I} \quad H_0: \theta \leq \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta > \theta_0, \\ \text{II} \quad H_0: \theta \geq \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta < \theta_0, \\ \text{III} \quad H_0: \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta \neq \theta_0, \end{cases}$$

其中 I 和 II 是单侧检验, III 是双侧检验, 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计, 取检验统计量

$$u = \frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{x} - \theta_0)}{\sqrt{\sigma^2(\hat{\theta})}},$$

则当 $\theta = \theta_0$ 时, $u \sim \mathcal{N}(0,1)$, 若检验的显著性水平为 α, 则对应三个检验的拒绝域分别为

$$W_{\text{I}} = \{u \geq u_{1-\alpha}\}, \quad W_{\text{II}} = \{u \leq u_\alpha\}, \quad W_{\text{III}} = \{|u| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}.$$

设 u_0 为代入样本值计算的结果, 则对应三个检验的 p 值分别为

$$p_{\text{I}} = 1 - \Phi(u_0), \quad p_{\text{II}} = \Phi(u_0), \quad p_{\text{III}} = 2(1 - \Phi(u_0)).$$

3.2 其他假设检验

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 $f(x;\theta)$ 的样本, 总体的概率函数为 $p(x;\theta)$.

♦ (似然比检验) 设 $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$, $\Theta_1 \cap \Theta_2 = \varnothing$, 考虑假设检验问题

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1,$$

统计量

$$\Lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta} p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)} = \frac{p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta})}{p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta}_0)},$$

称为该检验的**似然比**, 其中 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\theta}_0$ 是 θ 在 Θ 和 Θ_0 上的最大似然估计. 将其作为检验统计量, 拒绝域形如

$$W = \{\Lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq c\} \quad \text{其中} \quad \mathbb{P}(\Lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq c) \leq \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0,$$

则称该检验为显著性水平为 α 的**似然比检验**.

♦ (分类数据的 χ^2 拟合优度检验) 根据某项指标, 总体被分为 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 类, 第 i 类的样本个数为 $n_i, 1 \leq i \leq r$. 并设 $p_{10}, p_{20}, \cdots, p_{r0}$ 已知, 且 $p_{10} + p_{20} + \cdots + p_{r0} = 1$. 此时我们关心的原假设

$$H_0 : A_i \text{ 所占的比率是 } p_{i0}, \quad i = 1, 2, \cdots, r.$$

考虑统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_{i0})^2}{np_{i0}},$$

在 H_0 成立的条件下, 可以证明 $\chi^2 \xrightarrow{L} \chi^2(r-1)$, 若检验的显著性水平为 α, 则拒绝域 $W = \{\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(r-1)\}$. 设 χ^2_0 为代入样本值计算的结果, 则 $p = \mathbb{P}(\chi^2 \geq \chi^2_0)$. 上面的检验称为**分类数据的 χ^2 拟合优度检验**. 另外, 注意到

$$2 \ln \Lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) \approx \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_{i0})^2}{np_{i0}},$$

因此似然比检验与 χ^2 拟合优度检验等价.

♦ (分布的 χ^2 拟合优度检验) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自分布 $F(x)$ 的样本, $F_0(x)$ 是理论分布, 若需要检验的原假设 $H_0 : F(x) = F_0(x)$, 则称该检验为**分布的 χ^2 拟合优度检验**.

♠ (离散分布的 χ^2 拟合优度检验) 设总体 X 的取值为 $a_1, a_2, \cdots$, 把相邻的某些取值并为一类, 得到 $A_1, A_2, \cdots, A_r$, 且保证每一个类中样本个数 $n_i \geq 5$, 并记

$$p_i = \mathbb{P}(X \in A_i), \quad i = 1, 2, \cdots, r,$$

从而将离散分布的 χ^2 拟合优度检验转换为了分类数据的 χ^2 拟合优度检验.

♠ (连续分布的 χ^2 拟合优度检验) 设总体 X 的分布函数为 $F(x)$, 取 $r-1$ 个实数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{r-1}$, 将 $\mathbb{R}$ 分为 r 个区间

$$(-\infty, a_1], \quad (a_1, a_2], \quad \cdots, \quad (a_{r-1}, +\infty),$$

记 $a_0 = -\infty$, $a_r = +\infty$, 并记

$$p_i = F(a_i) - F(a_{i-1}), \quad i = 1, 2, \cdots, r,$$

从而将连续分布的 χ^2 拟合优度检验转换为了分类数据的 χ^2 拟合优度检验.

♦ (交叉分类数据的独立性检验) 设总体可以按 A 与 B 分类, 设 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 和 $B_1, B_2, \cdots, B_c$ 是总体的分类, 属于 A_i 和 B_j 的样本个数为 $n_{ij}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq c$.

		B					行和
		1	$\cdots$	j	$\cdots$	c	
A	1	n_{11}	$\cdots$	n_{1j}	$\cdots$	n_{1c}	$n_{1\cdot}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	i	n_{i1}	$\ddots$	n_{ij}	$\ddots$	n_{ic}	$n_{i\cdot}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	r	n_{r1}	$\cdots$	n_{rj}	$\cdots$	n_{rc}	$n_{r\cdot}$
列和		$n_{\cdot 1}$	$\cdots$	$n_{\cdot j}$	$\cdots$	$n_{\cdot c}$	n

排列得到的表格称为**二维列联表**, 考虑二维离散分布, 设样本同时属于 A_i 和 B_j 类的概率是 p_{ij}, 属于 A_i 类的概率是 $p_{i\cdot}$, 属于 B_j 类的概率是 $p_{\cdot j}$, 此时我们关心的原假设

$$H_0 : p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}, \quad i = 1, 2, \cdots, r, \quad j = 1, 2, \cdots, c.$$

考虑统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{ij} - n\hat{p}_{ij})}{n\hat{p}_{ij}}, \quad \text{其中} \quad \hat{p}_{ij} = \frac{n_{i\cdot}\cdot n_{\cdot j}}{n^2}, \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq c.$$

在 H_0 成立的条件下, $\chi^2 \sim \chi^2((r-1)(c-1))$, 若检验的显著性水平为 α, 则拒绝域 $W = \{\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}((r-1)(c-1))\}$, 设 χ_0^2 为代入样本值计算的结果, 则 $p = \mathbb{P}(\chi^2 \geq \chi_0^2)$.

	B	$\bar{B}$	合计
A	a	b	$a+b$
$\bar{A}$	c	d	$c+d$
合计	$a+c$	$b+d$	n

特别地, 若按 A 和 B 分类后共有四类, 列联表如上表所示, 其中 $n = a+b+c+d$, 则检验统计量

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

♦ (正态性检验) 用来判断总体分布是否为正态分布的检验方法称为**正态性检验**.

设总体的次序统计量 $x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(n)}$, 以下考虑的原假设 H_0 : 样本来自正态分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

♠ (正态概率纸) 将点 $\left(x_{(i)}, \dfrac{i-0.375}{n+0.25}\right), i = 1, 2, \cdots, n$ 绘制在正态概率纸上, 如果点在一条直线附近, 则认为该批数据来自正态分布总体, 否则认为不是来自正态分布总体.

♠ (Shapiro-Wilk 检验) 取检验统计量

$$W = \frac{\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})(x_{(i)} - \bar{x})\right]^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_{(i)} - \bar{x})^2},$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是与 n 有关的常数, 若检验的显著性水平为 α, 则拒绝域 $W = \{W \leq W_\alpha\}$, a_i 和 W_α 的值需查表.

♠ (Epps-Pulley 检验) 当 $n \geq 8$ 时, 取检验统计量

$$T_{\mathrm{EP}} = 1 + \frac{n}{\sqrt{3}} + \frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\exp\left\{-\frac{(x_j - x_i)^2}{2s_n^2}\right\} - \sqrt{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\exp\left\{-\frac{(x_i - \bar{x})^2}{4s_n^2}\right\},$$

若检验的显著性水平为 α, 则拒绝域 $W = \{T_{\mathrm{EP}} \geq T_{1-\alpha,\mathrm{EP}}(n)\}$, $T_{1-\alpha,\mathrm{EP}}(n)$ 的值需要查表或使用计算机计算.