泛函分析期中测试解答

统计 91 董晟渤

2021 年 11 月 16 日

题目 1. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数. 证明: 对任何实数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 必存在唯一的 $u \in C([0,1])$ 满足如下形式的积分方程:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \mathrm{e}^{x-s} u(s) \mathrm{d}s.$$

解答. 在原积分方程两端同时除以 e^{-x}, 则原积分方程等价于

$$u(x)\mathrm{e}^{-x} = f(x)\mathrm{e}^{-x} + \lambda \int_0^x u(s)\mathrm{e}^{-s} \mathrm{d}s.$$

令 $v(x) = u(x)\mathrm{e}^{-x}$, $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-x} \in C([0,1])$, 只需证明积分方程

$$v(x) = g(x) + \lambda \int_0^x v(s) \mathrm{d}s$$

存在唯一解 $v \in C([0,1])$. 考虑 $T : C([0,1]) \to C([0,1])$, $(Tv)(x) = f(x) + \lambda \int_0^x v(s)\mathrm{d}s$, 只需验证存在 $n \geq 1$, 使得 T^n 是压缩映像. 计算得

$$\begin{aligned}
d((T^n u)(s_0), (T^n v)(s_0)) &= \left| \lambda \int_0^{s_0} (T^{n-1}u(s_1) - T^{n-1}v(s_1)) \mathrm{d}s_1 \right| \\
&\leq |\lambda| \cdot \int_0^{s_0} d((T^{n-1}u)(s_1), (T^{n-1}v)(s_1)) \mathrm{d}s_1 \\
&\leq |\lambda|^2 \cdot \int_0^{s_0} \mathrm{d}s_1 \int_0^{s_1} d((T^{n-2}u)(s_2), (T^{n-2}v)(s_2)) \mathrm{d}s_2 \\
&\leq \cdots \\
&\leq |\lambda|^n \cdot \int_0^{s_0} \mathrm{d}s_1 \int_0^{s_1} \mathrm{d}s_2 \cdots \int_0^{s_{n-1}} d(u(s_n), v(s_n)) \mathrm{d}s_n,
\end{aligned}$$

对上式取最大值得

$$\begin{aligned} d(T^n u, T^n v) &= \max_{s_0 \in [0,1]} d((T^n u)(s_0), (T^n v)(s_0)) \\ &\le d(u,v) \cdot \int_0^1 \mathrm{d}s_1 \int_0^{s_1} \mathrm{d}s_2 \cdots \int_0^{s_{n-1}} \mathrm{d}s_n \\ &= \frac{|\lambda|^n}{n!} \cdot d(u,v), \end{aligned}$$

根据 $\frac{|\lambda|^n}{n!} \to 0$ 知, 存在 $n \ge 1$, 使得 $\frac{|\lambda|^n}{n!} < 1$, 根据压缩映像原理知, 存在 $v \in C([0,1])$, 使得 $T^n v = v$, 此时 $Tv = v$.

题目 2. 设 $\mathscr{X}$ 是线性赋范空间, A 是 $\mathscr{X}$ 中有界的集合. 证明: A 是完全有界集当且仅当对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\mathscr{X}$ 的有限维子空间 M, 使得 A 中每个点与 M 的距离都小于 ε.

解答. 一方面, 设 A 是完全有界集, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 设 A 的 ε-网为 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 令

$$M = \operatorname{span}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\},$$

则 M 是满足条件的 $\mathscr{X}$ 的有限维子空间.

另外一方面, 设对 $\varepsilon > 0$, 存在 $\mathscr{X}$ 的有限维子空间 M, 对任意的 $a \in A$, 都存在 $b \in M$, 使得 $d(b,a) < \varepsilon$. 令

$$N = \{b \in M | \operatorname{dist}(b, A) < \varepsilon\} \subset M,$$

则由 A 有界知 N 有界, 且由 M 是有限维子空间知 N 完全有界, 设 N 的 ε-网为 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$, 则对任意的 $b_i \in \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$, 存在 $a_i \in A$, 使得 $d(a_i, b_i) \le \varepsilon$. 考虑 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 以下说明其是 A 的 3ε-网.

对任意的 $a \in A$, 都存在 $b \in N$, 使得 $d(a,b) < \varepsilon$. 又对给定的 $b \in N$, 存在 $b_i \in \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$, 使得 $d(b, b_i) < \varepsilon$. 最后, 对给定的 b_i, 存在 $a_i \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 使得 $d(a_i, b_i) < \varepsilon$. 从而

$$d(a, a_i) < d(a,b) + d(b, b_i) + d(b_i, a_i) < 3\varepsilon,$$

这便说明 A 存在有限 3ε-网, 由 ε 的任意性知 A 完全有界.

题目 3. 设 $0<\alpha<\beta\le 1$ 且 $A\subset C^{0,\beta}([0,4])$ 是有界的. 证明: A 是 $C^{0,\alpha}([0,4])$ 中的列紧集.

解答. 以下为了方便, 记

$$d_0(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|,\quad d_\alpha(x,y)=\sup_{t_1,t_2\in[0,4],t_1\neq t_2}\frac{|(x(t_1)-y(t_1))-(x(t_2)-y(t_2))|^\alpha}{|t_1-t_2|^\alpha}.$$

我们知道, $d=d_0+d_\beta$ 是 $C^{0,\beta}[0,4]$ 上的距离, 且 A 在 $C([0,4])$ 上列紧. 设 $0<\alpha<\beta\le 1$, $A\subset C^{0,\beta}[0,4]$ 有界, 则对任意的 $x,y\in A$, 有

$$\begin{aligned}d_\alpha(x,y)&=\sup_{t_1,t_2\in[0,4],t_1\neq t_2}\frac{|(x(t_1)-y(t_1))-(x(t_2)-y(t_2))|}{|t_1-t_2|^\alpha}\\&=\sup_{t_1,t_2\in[0,4],t_1\neq t_2}\left(\frac{|(x(t_1)-y(t_1))-(x(t_2)-y(t_2))|}{|t_1-t_2|^\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\\&\qquad|(x(t_1)-y(t_1))-(x(t_2)-y(t_2))|^{1-\frac{\alpha}{\beta}},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases}\left(\dfrac{|(x(t_1)-y(t_1))-(x(t_2)-y(t_2))|}{|t_1-t_2|^\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}<M,\\|(x(t_1)-y(t_1))-(x(t_2)-y(t_2))|^{1-\frac{\alpha}{\beta}}\le|(x(t_1)-y(t_1))|^{1-\frac{\alpha}{\beta}}+|(x(t_2)-y(t_2))|^{1-\frac{\alpha}{\beta}},\end{cases}$$

以上两式相乘再取上确界得

$$d_\alpha(x,y)<2M\cdot\max_{t\in[0,4]}|(x(t)-y(t))|^{1-\frac{\alpha}{\beta}},$$

因此对于 $C^{0,\alpha}[0,4]$ 中的距离 d', 有

$$\begin{aligned}d'(x,y)&=d_0(x,y)+d_\alpha(x,y)\\&<\max_{t\in[0,4]}|x(t)-y(t)|+2M\cdot\max_{t\in[0,4]}|(x(t)-y(t))|^{1-\frac{\alpha}{\beta}}.\end{aligned}$$

任取 $\{x_n\}\subset A$, 由 A 在 $C[a,b]$ 中列紧, 知 $\{x_n\}$ 在 A 中存在收敛到 x 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足对任意的 $\varepsilon>0$, 都存在 $K\ge 1$, 使得对任意的 $k\ge K$, 都有

$$d_0(x_{n_k},x)=\max_{t\in[0,4]}|x_{n_k}(t)-x(t)|<\varepsilon.$$

此时

$$d'(x_{n_k},x)<\varepsilon+2M\cdot\varepsilon^{1-\frac{\beta}{\alpha}},$$

此即说明 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 按照 $C^{0,\alpha}[0,4]$ 的距离收敛的子列, 从而 A 在 $C^{0,\alpha}[a,b]$ 中列紧.

题目 4. 设 $\mathscr{X}$ 是线性赋范空间, $\mathscr{X}^*$ 是 $\mathscr{X}$ 的对偶空间, 证明: $\mathscr{X}^*$ 是 Banach 空间.

解答. 设 $\mathscr{X}$ 是在数域 $\mathbb{K}(\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C})$ 上的赋范线性空间, $\{f_n\}\subset\mathscr{X}^*$ 是 Cauchy 列, 也即对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\geq 1$, 使得对任意的 $n,m\geq N$, 有

$$\|f_n-f_m\|_{\mathscr{X}^*}<\varepsilon.$$

从而对任意的 $x\in\mathscr{X}$, 有 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\|x\|$. 此即说明对给定的 $x\in\mathscr{X}$, $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的 Cauchy 列, 故存在唯一的 $y_x\in\mathbb{K}$, 使得 $f_n(x)\to y_x$. 定义

$$f:\mathscr{X}\to\mathbb{K},\quad x\mapsto y_x,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 容易验证 f 是线性的, 且

$$|f(x)|=\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|\leq\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{\mathscr{X}^*}\cdot\|x\|\leq\left(\sup_{n\geq 1}\|f\|\right)\cdot\|x\|,$$

这便说明了 $f\in\mathscr{X}^*$. 接下来, 计算得

$$\begin{aligned}\|f_n-f\|_{\mathscr{X}^*}&=\sup_{\|x\|=1}|f_n(x)-f(x)|\\&=\sup_{\|x\|=1}\lim_{m\to\infty}|f_n(x)-f_m(x)|\\&\leq\lim_{m\to\infty}\sup_{\|x\|=1}|f_n(x)-f_m(x)|\\&=\lim_{m\to\infty}\|f_n-f_m\|_{\mathscr{X}^*}\to 0,\end{aligned}$$

此即说明当 $n\to\infty$ 时, $\{f_n\}$ 依 $\mathscr{X}^*$ 中的距离收敛到 $f\in\mathscr{X}^*$, 从而 $\mathscr{X}^*$ 是完备的.

题目 5. (1) 设 $\mathscr{X}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性赋范空间, $\mathscr{X}^*$ 是 $\mathscr{X}$ 的对偶空间, f_0, f_1, f_2, $\cdots$, $f_n\in\mathscr{X}^*$. 如果

$$\bigcap_{j=1}^{n}\ker(f_j)\subset\ker(f_0),$$

其中 $\ker(f)=\{x\in\mathscr{X}:f(x)=0\}$, 证明: 存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{F}$, 使得

$$f_0=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j.$$

(2) 在 (1) 的基础上, 进一步证明: 如果 $f_1,f_2,\cdots,f_n\in\mathscr{X}^*$ 是线性无关的, 则必存在 $e_1,e_2,\cdots,e_n\in\mathscr{X}$, 使得对任意的 $1\leq i,j\leq n$, 有 $f_i(e_j)=\delta_{ij}$.

解答. (1) 使用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时, 设 $\ker f_1 \subset \ker f_0$. 若 $f_1=0$, 则 $\ker f_1 = \mathscr{X} = \ker f_0$, 从而 $f_0=0$, 此时对任意的 $\lambda_1 \in \mathbb{F}$, 都有 $f_0 = \lambda_1 f_1$; 若 $f_1 \neq 0$, 则存在 $x_1 \neq 0$, 使得 $f_1(x_1) \neq 0$. 不妨设 $f_1(x_1)=1$, 否则可以用 $\dfrac{x_1}{f_1(x_1)}$ 代替 x_1. 从而, 对任意的 $x \in \mathscr{X}$, 都有

$$f_1(x) = f_1(x_1)f_1(x) = f_1(x_1 \cdot f_1(x)) \implies f_1(x - x_1 \cdot f_1(x)) = 0,$$

这便说明了 $x - x_1 \cdot f_1(x) \in \ker(f_1) \subset \ker(f_0)$, 因此

$$f_0(x - x_1 f_1(x)) = 0 \implies f_0(x) = f_0(x_1)f_1(x), \quad \forall x \in \mathscr{X},$$

取 $\lambda_1 = f_0(x_1)$ 即可.

假设当 $n \leq k$ 时结论都成立, 则当 $n=k+1$ 时, 记 $\mathscr{X}_0 = \ker f_{k+1}$, 则

$$\bigcap_{j=1}^{k} \ker\left(f_j|_{\mathscr{X}_0}\right) = \bigcap_{j=1}^{k} \ker(f_j) \cap \mathscr{X}_0 = \bigcap_{j=1}^{k+1} \ker(f_j) \subset \ker(f_0) \cap \mathscr{X}_0 = \ker\left(f_0|_{\mathscr{X}_0}\right),$$

从而, 根据归纳假设知, 存在 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{F}$, 使得

$$f_0|_{\mathscr{X}_0} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, f_j|_{\mathscr{X}_0} \implies \left(f_0|_{\mathscr{X}_0} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, f_j|_{\mathscr{X}_0}\right)(x) = 0, \quad \forall x \in \mathscr{X}_0,$$

记 $g = f_0 - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j$, 则 $\mathscr{X}_0 = \ker(f_{k+1}) \subset \ker(g)$, 根据归纳假设知, 存在 $\lambda_{k+1} \in \mathbb{F}$, 使得

$$g = \lambda_{k+1} f_{k+1} \implies f_0 = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j f_j.$$

根据以上过程, 结合数学归纳法原理知原命题成立.

(2) 若对任意的 $1 \leq i \leq n$, 存在

$$x_i \in (\ker(f_i))^C \cap \bigcap_{j \neq i} \ker(f_j),$$

则 $\dfrac{x_i}{f_i(x_i)}$ 满足 $f_j\left(\dfrac{x_i}{f_i(x_i)}\right) = \delta_{ij}$. 否则, 假设存在 $1 \leq i \leq n$, 使得

$$(\ker(f_i))^C \cap \bigcap_{j \neq i} \ker(f_j) = \varnothing \implies \bigcap_{j \neq i} \ker(f_j) \subset \ker(f_i),$$

根据 (1) 知 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性相关, 矛盾.

题目 6. 设 E 是实线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 中以 0 为内点的真凸子集, $x_0 \in E$, 则存在闭超平面分离 x_0 和 E.

解答. 设 p 是 E 上的 Minkowski 泛函, 则 p 在 $\mathscr{X}$ 上满足正齐次性和次可加性,

$$p(x) \leq 1, \quad \forall x \in E, \quad 且 \quad p(x_0) \geq 1.$$

由 0 是 E 的内点知, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(0,\delta) \subset E$. 又对任意的 $x \in E$, 都有 $\frac{\delta x}{2\|x\|} \in B(0,\delta) \subset E$, 因此

$$p\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right) \leq 1 \implies p(x) \leq \frac{2}{\delta} \cdot \|x\|.$$

令 $\mathscr{X}_0 = \operatorname{span}\{x_0\} = \{\lambda x_0 | \lambda \in \mathbb{R}\}$, 定义

$$f_0 : \mathscr{X}_0 \to \mathbb{R}, \quad \lambda x_0 \to \lambda p(x_0),$$

则 f_0 是 $\mathscr{X}_0$ 上的线性泛函, 且 $f_0(\lambda x_0) \leq \lambda p(x_0) \leq p(\lambda x_0)$. 由 Hahn-Banach 定理知, 存在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 f, 使得

(1) $f(\lambda x_0) = f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0), \forall \lambda \in \mathbb{R}$, 从而 $f(x_0) = p(x_0) \geq 1$;

(2) $f(x) \leq p(x), \forall x \in \mathscr{X}$, 从而对任意的 $x \in E$, 都有 $f(x) \leq p(x) \leq 1$; 同时对任意的 $x \in \mathscr{X}$, 都有

$$f(x) \leq p(x) \leq \frac{2}{\delta} \cdot \|x\|,$$

故 $f \in \mathscr{X}^*$.

根据 (1) 和 (2) 知 H_f^1 是分离 x_0 和 E 的超平面.