Xi'an Jiaotong University

XJTU

张博闻 董晟渤

Notes of Functional Analysis

励志书院学业中心
Li Zhi Academic Center

Notes of Functional Analysis

董晟渤　　张博闻

前言

"泛函分析心犯寒!"

这是多少同学在凛冬的寒风中, 在肉体与心灵的双重摧残下吐露而出的心声?

泛函分析, 作为本学年, 乃至数学专业本科阶段最硬核的课程, 其难度与重要性从一代代学长学姐的口耳相传中可见一斑.

但幸好, 我们遇到了波波老师! 波波老师以一丝不苟教学态度, 循循善诱的授课方式, 字斟句酌的作业批改, 带我们跨过这道"最难的坎", 经过本学期的学习, 我们对泛函分析这门学科有了崭新的认识.

这份笔记根据尤波老师上课讲述内容与板书, 由信计 91 班的张博闻和统计 91 班的董晟渤轮流整理而成. 全文使用 LaTeX 排版, 在保证了准确的同时尽量地追求美观, 如连续函数空间 C 和紧算子的全体 $\mathcal{C}$ 和复数域 $\mathbb{C}$, 可积函数空间 L 和有界线性算子的全体 $\mathcal{L}$ 和极大线性流形 $\mathscr{L}$ 之类相似的记号就能进行区分.

一学期的时光转瞬即逝, 再次感谢尤老师的传道受业, 答疑解惑, 也非常感谢所有指出笔记中错误与建议的同学, 有了你们的贡献这份笔记才会越来越好.

最后, 由于笔者水平有限, 其中的错误与不足在所难免. 如有发现错误或者提出建议, 欢迎联系笔者, 联系方式为:

张博闻: 2905980690(QQ), 董晟渤: 198368289(QQ).

再次感谢大家的支持!

张博闻　董晟渤

二〇二二年元旦

于西安交通大学

目录

第一章　泛函分析入门

1.1　度量空间

定义 1.1.1. 设 $\mathscr{X}$ 为非空集合, 称 $\mathscr{X}$ 上的二元函数 $d : \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ 为 $\mathscr{X}$ 上的**度量函数** (**距离函数**), 如果满足

(1) (**正定性**) $d(x,y) \geqslant 0$, 且 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(2) (**对称性**) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in \mathscr{X}$;

(3) (**三角不等式**) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z)$, $\forall x,y,z \in \mathscr{X}$. 称 $d(x,y)$ 为 x 到 y 的**距离**, 并称 $(\mathscr{X}, d)$ 为**度量空间**.

- **例 1.** $\mathscr{X} = \mathbb{R}$, 定义 $d(x,y) = |x-y|$ 为 $\mathscr{X}$ 中的一个距离.

- **例 2.** $\mathscr{X} = \mathbb{R}^n$, 定义 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left(\sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$ 为 $\mathscr{X}$ 中的一个距离. 一般地,

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \quad (1 \leqslant p \leqslant +\infty, \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n)$$

均为 $\mathscr{X}$ 中的距离.

证明. 对于给定的距离, 正定性和对称性是显然的. 且当 $p = 1$ 或 $+\infty$ 时, 三角不等式也是显然成立的. 于是我们只对 $1 < p < +\infty$ 时的三角不等式给出证明 □

定义 1.1.2. 设 $(\mathscr{X}, d)$ 为度量空间, $\{x_n\}$ 为 $\mathscr{X}$ 中的点列, $x_0 \in \mathscr{X}$. 如果

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0,$$

则称 $\{x_n\}$ 按照距离 d **收敛于** x_0, 或称 x_0 为 $\{x_n\}$ 的**极限**, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \text{或} \quad x_n \to x_0.$$

称 $\{x_n\}$ 在 $\mathscr{X}$ 中收敛, 若存在 $x_0 \in \mathscr{X}$, 使得 $x_n \to x_0$.

容易证明, 如果点列收敛, 则其极限唯一.

定义 1.1.3. 设 A 是度量空间 $(\mathscr{X}, d)$ 的子集. 称 A 是**有界的**, 如果存在 $x_0 \in \mathscr{X}$ 以及常数 $c > 0$, 使得

$$d(x_0, x) \leqslant c, \quad \forall x \in A.$$

显然, 如果 $\{x_n\}$ 在 $\mathscr{X}$ 中收敛, 则 $\{x_n\}$ 有界.

• **例 3.** 设 $\mathscr{X} = \mathbb{R}^d$, 定义 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$. 则 $\boldsymbol{x}^{(n)} \to \boldsymbol{x}$ 的充要条件为

$$x_i^{(n)} \to x_i, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant d.$$

• **例 4.** 定义有界数列空间 ℓ^∞ 为

$$\ell^\infty = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \;\middle|\; \sup_{j\geqslant 1} |x_j| < +\infty \right\}.$$

则 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup\limits_{j\geqslant 1} |x_j - y_j|$ 为 ℓ^∞ 上的距离.

• **例 5.** 定义所有序列空间 (s) 为

$$(s) = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mid x_j \in \mathbb{R}, j \geqslant 1\}.$$

并定义

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in (s).$$

则 d 为 (s) 上的一个度量函数. 如果序列 $\{x^n\} \subset (s)$, 则

$$\boldsymbol{x}^{(n)} \to \boldsymbol{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x_j^{(n)} \to x_j, \quad \forall j \geqslant 1.$$

1.2　拓扑与连续函数

定义 1.2.1. 设 $\mathscr{X}, d$ 为度量空间, $x_0 \in \mathscr{X}$, $r > 0$. 称

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathscr{X} \mid d(x, x_0) < r\}$$

为以 x_0 为球心, r 为半径的**开球**, 或 x_0 的 r-**邻域**.

定义 1.2.2. 设 A 为 $\mathscr{X}$ 的子集. 对于 $x_0 \in \mathscr{X}$, 称 x_0 为 A 的**内点**, 若存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x_0, \delta) \subset A$. A 的所有内点组成的集合称为 A 的**内部**, 记为 $\mathring{A}$ 或 $\mathrm{int}A$.
若 $\mathring{A} = A$, 则称 A 为**开集**.

定理 1.2.1. *关于开集, 有下列结论成立:*

(1) 空集 $\varnothing$, 全集 $\mathscr{X}$ 均为开集;

(2) 有限多个开集的交仍为开集;

(3) 无穷多个开集的并仍为开集.

定义 1.2.3. 设 A 为 $\mathscr{X}$ 的子集. 对于 $x_0 \in \mathscr{X}$, 称 x_0 为 A 的**聚点**, 若对于任意的 $\delta > 0$, 有

$$(B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \varnothing.$$

称 A 的所有聚点组成的集合为 A 的**导集**, 记为 A'.
称 $A \cup A' = \overline{A}$ 为 A 的**闭包**.
若 $A = \overline{A}$, 则称 A 为**闭集**.

定理 1.2.2. *设 A 为 $\mathscr{X}$ 的子集, $x_0 \in \mathscr{X}$. 则 $x_0 \in A'$ 的充要条件为存在 A 中点列 $\{x_n\}(x_n \neq x_0)$, 使得 $x_n \to x_0$.*

推论 1.2.1. 设 A 为 $\mathscr{X}$ 的子集, 则 A 为闭集的充要条件为 A 中所有收敛点列的极限均在 A 中.

定理 1.2.3. 设 A 为 $\mathscr{X}$ 的子集, 则 A 是闭集的充要条件为 A^C 是开集.

定理 1.2.4. 设 $(\mathscr{X}, d)$ 是度量空间. 则

(1) $\varnothing, \mathscr{X}$ 是闭集;

(2) 有限多个闭集的并仍为闭集;

(3) 无穷多个闭集的交仍为闭集.

设 $\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{X}$, 则 $(\mathscr{Y}, d)$ 是度量空间, 称 $(\mathscr{Y}, d)$ 是 $(\mathscr{X}, d)$ 的**子空间**.

定理 1.2.5. 设 $(\mathscr{Y}, d)$ 是 $(\mathscr{X}, d)$ 的子空间, 则

(1) A 是 $\mathscr{Y}$ 中的闭集 $\iff$ 存在 $\mathscr{X}$ 中的开集 G, 使得 $A = G \cap \mathscr{Y}$;

(2) A 是 $\mathscr{Y}$ 中的闭集 $\iff$ 存在 $\mathscr{X}$ 中的闭集 F, 使得 $A = F \cap \mathscr{Y}$.

以下, 给出连续函数的定义及性质.

定义 1.2.4. 设 $(\mathscr{X}, d), (\mathscr{Y}, \rho)$ 是度量空间. $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是映射, $x_0 \in \mathscr{X}$, $y_0 = f(x_0)$, 称 f 在 x_0 点**连续**, 如果对 y_0 的任何 ε-邻域 $B_{\mathscr{Y}}(y_0, \varepsilon)$, 都存在 x_0 的 δ-邻域 $B_{\mathscr{X}}(x_0, \delta)$, 使得

$$f(B_{\mathscr{X}}(x_0, \delta)) \subseteq B_{\mathscr{Y}}(y_0, \varepsilon).$$

如果 f 在 $\mathscr{X}$ 中每一点处都连续, 则称 f 是从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的**连续映射**.

如果 f 是从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的一一对应[a], 且 f, f^{-1} 都连续, 则称 f 是从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的**同胚映射**. 此时, 称 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是**同胚的**.

[a] 或称**双射** (bijection), 既是单射又是满射.

定理 1.2.6. 设 $(\mathscr{X}, d), (\mathscr{Y}, \rho)$ 是度量空间, 则下列结论等价:[a]

(1) f 是从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的连续映射;

(2) 对 $\mathscr{Y}$ 中的任何开集 V, $f^{-1}(V)$ 是 $\mathscr{X}$ 中开集;

(3) 对 $\mathscr{Y}$ 中的任何闭集 U, $f^{-1}(U)$ 是 $\mathscr{Y}$ 中闭集;

(4) 对 $\mathscr{X}$ 中任何点列 $\{x_n\}$, 且 $x_n \to x$, 都有

$$f(x_n) \to f(x).$$

[a]董佬说证明很简单, 死磕定义即可.

证明. 首先证明 (1) $\iff$ (2).

(必要性) 设 f 是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的连续映射, 对 $\mathscr{Y}$ 中的任何开集 V, 任取 $x_0 \in f^{-1}(V)$, 则 $y_0 = f(x_0) \in V$. 从而存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$B_{\mathscr{Y}}(y_0, \varepsilon) \subset V.$$

由 f 在 x_0 点连续知, 存在 x_0 的 δ-邻域 $B_{\mathscr{X}}(x_0, \delta)$, 使得

$$f(B_{\mathscr{X}}(x_0, \delta)) \subset B_{\mathscr{Y}}(y_0, \varepsilon),$$

从而 $B_{\mathscr{X}}(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_{\mathscr{Y}}(y_0, \varepsilon)) \subset f^{-1}(V)$, 也即 x_0 是 $f^{-1}(V)$ 的内点. 由 x_0 的任意性知, $f^{-1}(V)$ 是开集.

(充分性) 若对 $\mathscr{Y}$ 中的任何开集 V, $f^{-1}(V)$ 是 $\mathscr{X}$ 中开集, 任取 $x_0 \in \mathscr{X}$, $y_0 = f(x_0)$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, $B_{\mathscr{Y}}(y_0, \varepsilon)$ 是 $\mathscr{Y}$ 中开集. 从而 $B_{\mathscr{X}}(x_0, \delta)$ 是 $\mathscr{X}$ 中开集. 而 $x_0 \in f^{-1}(B_{\mathscr{Y}}(y_0, \varepsilon))$, 从而存在 $\delta > 0$, 使得

$$B_{\mathscr{X}}(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_{\mathscr{Y}}(y_0, \varepsilon)), \quad \text{进而} \quad f(B_{\mathscr{X}}(x_0, \delta)) \subset B_{\mathscr{Y}}(y_0, \varepsilon).$$

其次证明 (2) $\iff$ (3). 根据定理 (1.2.3) 得知, A 是开集当且仅当 A^C 是闭集.

(必要性) 设对 $\mathscr{Y}$ 中的任何开集 V, $f^{-1}(V)$ 是 $\mathscr{X}$ 中开集, 对 $\mathscr{Y}$ 中的任何闭集 U, $V = \mathscr{Y} - U$ 为开集,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\mathscr{Y} - U) = \mathscr{X} - f^{-1}(U)$$

为 $\mathscr{X}$ 中的开集, 从而 $f^{-1}(U)$ 是 $\mathscr{X}$ 中的闭集. 充分性同理.

最后证明 (1) $\iff$ (4).

(必要性) 设 f 是从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的连续映射, 对 $\mathscr{X}$ 中的任何点列 $\{x_n\}$, 设 $x_n \to x$, 则对任意的 $\delta > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$d(x_n, x) < \delta.$$

又对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(B_{\mathscr{X}}(x,\delta)) \subset B_{\mathscr{Y}}(f(x),\varepsilon),$$

因此 $d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$, 此即说明 $f(x_n) \to f(x)$.

(充分性) 假设 f 不连续, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意的正整数 n, 都存在 $x_n \in \mathscr{X}$, 使得

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n}, \quad 但是 \quad d(f(x_n), f(x)) \geqslant \varepsilon_0.$$

此时 $x_n \to x$, 但是 $f(x_n) \to f(x)$, 矛盾. $\square$

1.3 度量空间的可分性与完备性

定义 1.3.1. 设 $\mathscr{X}$ 是度量空间, $A, B \subset \mathscr{X}$, 称 A 在 B 中**稠密**, 如果 $B \subset \overline{A}$.[a] 设 $S \subset \mathscr{X}$ 是子集, 称 S 是**疏集**, 如果 S 不在任何非空开子集中稠密.

称 $\mathscr{X}$ 是**可分的**, 如果 $\mathscr{X}$ 存在可数的稠密子集.

[a]注意此处并没有要求 $A \subset B$.

- **例 6.** $\mathbb{R}^n$ 是可分的.

证明. 任取 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$, 存在 $r_i \in \mathbb{Q}$, 使得 $|x_i - r_i| < \varepsilon$. 令 $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$,

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - r_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{n} \cdot \varepsilon. \qquad \square$$

- **例 7.** 所有序列空间 (s) 是可分的.[a]

[a]这是一个有趣的例子, 其中截断的技巧可以记住.

证明. 取 $A = \Big\{\{r_i\} = (r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots)\Big| r_i \in \mathbb{Q}, r_i 中只有有限项是非零的\Big\}$, 令

$$A_n = \{\{r_i\} | r_i \in \mathbb{Q}, i \leqslant n; r_i = 0, i > n\}.$$

则 A_n 是可数的, 而 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 从而 A 是可数的. 任取 $\boldsymbol{x} = \{x_i\} \in (s)$, 对任意的 $\varepsilon > 0$,

存在正整数 N, 使得

$$\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对 $(x_1,x_2,\cdots,x_N)\in\mathbb{R}^N$, 存在 $(r_1,r_2,\cdots,r_N)\in\mathbb{Q}^N$, 使得

$$\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i-r_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_N,0,0,\cdots)\in A_N\subset A$, 则

$$\begin{aligned}
d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})&=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|x_i-r_i|}{1+|x_i-r_i|}+\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\cdot\frac{|x_j-0|}{1+|x_j-0|}\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2^i}\cdot|x_i-r_i|+\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\
&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

- **例 8.** $\ell^p(1\leqslant p<\infty)$ 是可分的, 其中距离

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j-y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

定理 1.3.1. 设 $(\mathscr{X},d)$ 为度量空间, 如果 $\mathscr{X}$ 中存在不可数集 B 以及 $\varepsilon_0>0$, 使得对于任意的 $x,y\in B$ 且 $x\neq y$, 都有

$$d(x,y)\geqslant\varepsilon_0,$$

则 $(\mathscr{X},d)$ 是不可分的.

证明. 假设 $(\mathscr{X},d)$ 可分, 则 $\mathscr{X}$ 存在可数的稠密子集, 设为 A. 从而对于任意的 $x,y\in B$ 且 $x\neq y$, 存在 $x',y'\in A$, 满足 $d(x,x')<\dfrac{\varepsilon_0}{3}$, $d(y,y')<\dfrac{\varepsilon_0}{3}$. 由三角不等式

$$d(x,y)\leqslant d(x,x')+d(x',y')+d(y',y),$$

可以得到 $d(x', y') > \dfrac{\varepsilon_0}{3}$, 即 $x' \neq y'$. 这就建立了 $B \to A$ 的一个单射:

$$f : x \mapsto x'.$$

因此有 $\sharp(B) \leqslant \sharp(A)$. 而由于 B 为不可数集, A 为可数集, 矛盾! □

- **例 9.** ℓ^∞ 是不可分的.

证明. 设集合

$$B = \big\{\{x_n\} \in \ell^\infty \big| x_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}, \forall i \geqslant 1\big\}.$$

则 $B \subset \ell^\infty$. 构造映射

$$f : \begin{array}{ccc} B & \to & [0,1], \\ \{x_n\} & \mapsto & 0.x_1x_2\cdots x_n\cdots. \end{array}$$

则 f 为一对一的. 由于 $[0, 1]$ 为不可数集, 因此 B 也是不可数的. 而对于任意的 $x, y \in B$ 且 $x \neq y$, 有 $d(x, y) \geqslant 1$, 因此由定理 (1.3.1) 知, ℓ^∞ 是不可分的, □

- **例 10.** $L^\infty(a, b)$ 是不可分的.

定义 1.3.2. 设 $(\mathscr{X}, d)$ 是度量空间, 称 $\mathscr{X}$ 中的点列 $\{x_n\}$ 是**基本列** (**Cauchy 列**), 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得对于 $m, n \geqslant N$, 有 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. 如果 $\mathscr{X}$ 中任何 Cauchy 列均在 $\mathscr{X}$ 中收敛, 则称 $\mathscr{X}$ 为**完备的**.

关于 Cauchy 列有如下结论:

(1) Cauchy 列必定有界;

(2) 如果 Cauchy 列存在一个收敛子列, 则该 Cauchy 列必收敛.

- **例 11.** $\mathbb{R}^n$ 是完备的.

证明. 设点列 $\{\boldsymbol{x}^{(m)}\} \subset \mathbb{R}^n$, 且

$$\boldsymbol{x}^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)}).$$

根据例 3 的结论知,

$$\boldsymbol{x}^{(m)} \to \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \iff x_i^{(m)} \to x_i, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

由于 $\mathbb{R}$ 是完备的, 因此若 $x_i^{(m)} \to x_i$, 则 $x_i \in \mathbb{R}$, 所以极限 $\boldsymbol{x}^{(m)} \to \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 即 $\mathbb{R}^n$ 是完备的. □

- **例 12.** $(s) = \left\{\{x_j\} \middle| x_j \in \mathbb{R}, j \geqslant 1\right\}$ 是完备的, 其中定义的距离为

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in (s).$$

证明. 事实上, 根据例 5 的结论, $\{\boldsymbol{x}^{(m)}\}$ 收敛与其每个分量收敛是等价的, 因此可以类似于上一题中的证明过程证明本题的结论. □

- **例 13.** $L^p(\Omega)(1 \leqslant p < +\infty)$, ℓ^∞ 均是完备的, 其中

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ 可测} \middle| \int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x < +\infty \right\},$$

对于 $u, v \in L^p(\Omega)$, 定义距离

$$d(u, v) = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |u(x) - v(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} & (1 \leqslant p < +\infty) \\ \operatorname*{esssup}_{x \in \Omega} |u(x) - v(x)| = \inf\limits_{m(E)=0} \sup\limits_{x \in \Omega \setminus E} |u(x) - v(x)| & (p = +\infty) \end{cases}.$$

并定义

$$\ell^p = \left\{\{x_n\} \middle| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < +\infty \right\}, \quad (1 \leqslant p \leqslant +\infty)$$

对于 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^p$, 定义距离

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p\right)^{1/p} & (1 \leqslant p < +\infty) \\ \sup\limits_{j \geqslant 1} |x_j - y_j| & (p = +\infty) \end{cases}.$$

1.4 列紧性与紧性

1.4.1 列紧性

定义 1.4.1. 设 $\mathscr{X}$ 为度量空间, $A \subset \mathscr{X}$. 如果 A 中的任何点列均有在 $\mathscr{X}$ 中收敛的子列, 则称 A 是**列紧的**.

如果 A 是列紧的闭子集, 则称 A 是**自列紧的**.[a]

[a]用点列的语言描述自列紧如下: 如果 A 中任何点列都有在 A 中收敛的子列, 则称 A 是**自列紧的**, 需要注意列紧与自列紧的区别.

关于列紧性, 有如下定理:

定理 1.4.1. *设 $\mathscr{X}$ 为度量空间, $A \subset \mathscr{X}$ 为列紧的, 设 $\{x_n\} \subset A$ 为 $\mathscr{X}$ 中的 Cauchy 列, 则 $\{x_n\}$ 在 $\mathscr{X}$ 中收敛.*

这个定理也可以表述为: 如果 $\mathscr{X}$ 是列紧空间, 则 $\mathscr{X}$ 为完备的.

证明. 设 $\{x_n\} \subset \mathscr{X}$ 为 Cauchy 列, 则存在子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, 使得

$$x_{n_k} \to x \in \mathscr{X}.$$

由于 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 则任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n, n_k > N$ 时, 有

$$d(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon.$$

令 $k \to \infty$, 由距离的连续性, 可得

$$d(x_n, x) \leqslant \varepsilon, \quad (n > N)$$

即 $x_n \to x$, 故 $\mathscr{X}$ 是完备的. □

定义 1.4.2. 设 $\mathscr{X}$ 为度量空间, $A \subset \mathscr{X}$. 设 $\varepsilon > 0$, 如果存在 A 中有限个点 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n(\varepsilon)}\}$, 使得

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n(\varepsilon)} B(x_j, \varepsilon),$$

则称 A 具有**有限 ε-网** $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n(\varepsilon)}\}$.

设 $\mathscr{X}$ 为度量空间, $M \subset \mathscr{X}$, $N \subset M$, 以及 $\varepsilon > 0$. 称 N 是 M 的 **ε-网**, 如果对于任意的 $x \in M$, 存在 $y \in N$, 使得

$$d(x, y) < \varepsilon.$$

称集合 A 为**完全有界**的, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 都存在 A 的有限 ε-网.

关于完全有界, 有以下结论:

定理 1.4.2. 完全有界集一定是有界的, 反之不成立.

证明. 假设 A 为完全有界集, 任取 $\varepsilon > 0$, 设 A 的有限 ε-网为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n(\varepsilon)}\}$, 则有

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n(\varepsilon)} B(x_j, \varepsilon).$$

令

$$R = \max_{1 < j \leqslant n(\varepsilon)} d(x_1, x_j) + \varepsilon,$$

则以 x_1 为圆心, R 为半径的圆 $B(x_1, R)$ 满足

$$B(x_1, R) \supset \bigcup_{j=1}^{n(\varepsilon)} B(x_j, \varepsilon) \supset A,$$

即 A 为有限集.

下面给出一个有界但不完全有界的例子: 设 $\mathscr{X} = \mathbb{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$, 定义

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

于是 $(\mathscr{X}, d)$ 是完备的度量空间, $\mathscr{X}$ 是有界的但不是完全有界的. □

定理 1.4.3. 设 $\mathscr{X}$ 为度量空间, 如果 $\mathscr{X}$ 中任何完全有界集均为列紧集, 则 $\mathscr{X}$ 为完备的.

证明. 首先证明, $\mathscr{X}$ 中每个 Cauchy 列均为完全有界的. 设 $\{x_n\} \subset \mathscr{X}$ 为 Cauchy 列, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, 对于 $m, n \geqslant N(\varepsilon)$, 均有 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. 因此当 $n \geqslant N(\varepsilon)$

时, $d(x_n, x_{N(\varepsilon)}) < \varepsilon$, 即

$$x_n \in B(x_{N(\varepsilon)}, \varepsilon), \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon).$$

而 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{N(\varepsilon)-1}\}$ 仅有有限个点, 因此 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{N(\varepsilon)-1}, x_{N(\varepsilon)}\}$ 为 $\{x_n\}$ 的有限 ε-网, 故 $\{x_n\}$ 为完全有界的.

又由于 $\mathscr{X}$ 中任何完全有界集均为列紧集, 因此 $\{x_n\}$ 为列紧集. 则 $\{x_n\}$ 必定存在收敛子列, 则该 Cauchy 列收敛. 故 $\mathscr{X}$ 中任何 Cauchy 列均收敛, 即 $\mathscr{X}$ 为完备的. □

定理 1.4.4. 设 $\mathscr{X}$ 为度量空间, $A \subset \mathscr{X}$ 为完全有界的, 则 A 是可分的.

证明. 由于 A 是完全有界的, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 都有 A 的有限 ε-网. 分别令 $\varepsilon = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$, 并记 $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$ 时 A 的一个有限 ε-网为

$$N_k = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_{n(k)}^{(k)}\}, \quad k = 1, 2, \cdots, n, \cdots,$$

令 $N = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} N_k$, 则 N 是可数集.

$\forall x \in \mathscr{X}, \forall \varepsilon > 0$, 只需取 $k_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 则存在 $x' \in N_{k_0} \subset N$, 满足 $d(x, x') < \varepsilon$, 于是 N 在 A 中稠密. 即 N 为 A 的可数的稠密子集, 故 A 是可分的. □

定理 1.4.5. 设 $(\mathscr{X}, d)$ 为度量空间, 则 $\mathscr{X}$ 是完备的当且仅当对 $\mathscr{X}$ 中的任一列非空闭集 $\{F_n\}$, 如果满足

(1) $F_{n+1} \subseteq F_n$, $\forall n \geqslant 1$;

(2) $d_n := \operatorname{diam}(F_n) = \sup\limits_{x,y \in F_n} d(x, y) \to 0$, 当 $n \to \infty$ 时.

都存在唯一的 $x \in \mathscr{X}$, 且满足 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

证明. (必要性) 由于 $F_n \neq \varnothing$, 则 $\exists x_n \in F_n$, $\forall n \geqslant 1$. 由于当 $n \to \infty$ 时, $d_n \to 0$, 因此对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 任取 $n \geqslant N$, 有 $d_n < \varepsilon$.

任取 $n, m > N$, 则有 $x_n \in F_n \subseteq F_N$, $x_m \in F_m \subseteq F_N$. 从而

$$d(x_n, x_m) \leqslant d_N < \varepsilon.$$

因此 $\{x_n\} \subset \mathscr{X}$ 为 Cauchy 列. 又由于 $\mathscr{X}$ 是完备的, 因此存在 $x \in \mathscr{X}$, 使得 $x_n \to x$. 下面证明存在唯一的 $x \in \mathscr{X}$ 满足 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$:

(i) 存在性: 事实上, $\forall n \geqslant 1$, 当 $m \geqslant n$ 时, $x_m \in F_m \subseteq F_n$, 这表示 $\{x_n\}$ 在第 n 项后均在 F_n 中. 而 F_n 为闭集, 因此点列的极限 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$;

(ii) 唯一性: 如果存在 $x, y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, 则 $d(x,y) \leqslant d_n \to 0$, 故 $x = y$.

(充分性) 设 $\{x_n\} \subset \mathscr{X}$ 为 Cauchy 列, 要证 $\mathscr{X}$ 完备, 只需证明 $\{x_n\}$ 在 $\mathscr{X}$ 中收敛. 由 Cauchy 列的条件知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 对于任意的 $n, m \geqslant N$, 有 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

$\forall k \geqslant 1$, 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足

$$d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}.$$

令 $F_k = \overline{B}\left(x_{n_k}, \dfrac{1}{2^{k-1}}\right)$, 下面验证我们构造的闭球列满足两个条件:

(i) $F_{k+1} \subseteq F_k$. $\forall y \in F_{k+1}$, 则 $d(y, x_{n_{k+1}}) < \dfrac{1}{2^k}$. 而

$$d(y, x_{n_k}) \leqslant d(y, x_{n_{k+1}}) + d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

因此 $y \in F_k$. 则 $F_{k+1} \subseteq F_k$;

(ii) $d(F_k) \to 0 (n \to \infty)$. 事实上, $d(F_k) = \operatorname{diam}(F_k) = \dfrac{2}{2^{k-1}} = \dfrac{1}{2^{k-2}} \to 0$.

因此存在唯一的 $x \in \mathscr{X}$ 且 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_k$. 又 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ 且 $x_{n_k} \to x$, 因此 $x_n \to x \in \mathscr{X}$. 即 $\mathscr{X}$ 是完备的度量空间. □

定义 1.4.3. 设 $\mathscr{X}$ 为度量空间, 如果 $\mathscr{X}$ 可以表示为可数个疏集的并, 则称 $\mathscr{X}$ 为**第一纲集**.

若 $\mathscr{X}$ 不是第一纲集, 则称其为**第二纲集**.

定理 1.4.6 (Baire 纲定理). 完备的度量空间一定是第二纲的.

证明. 假设 $\mathscr{X}$ 是完备的度量空间, 且可以表示为 $\mathscr{X} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 的形式, 其中 A_n 均为疏集, $n \in \mathbb{N}^*$. 对任意的球 $B(x_0, 1)$, 由 A_1 为疏集知, A_1 不在 $B(x_0, 1)$ 中稠密. 则存在 $x_1 \in B(x_0, 1)$ 及 $r_1 < 1$, 使得 $\overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, 1)$, 且 $\overline{B}(x_1, r_1) \cap A_1 = \varnothing$. 又 A_2 也为疏集, 则存在 $x_2 \in B(x_1, r_1)$ 及 $x_2 < \dfrac{1}{2}$, 使得 $\overline{B}(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1)$, 且 $\overline{B}(x_2, r_2) \cap A_2 = \varnothing$.

重复上述过程, 即可得到 $x_k \in \overline{B}(x_{k-1}, r_{k-1})$ 及 $r_k < \dfrac{1}{k}$, 使得 $\overline{B}(x_k, r_k) \subset B(x_{k-1}, r_{k-1})$, 且 $\overline{B}(x_k, r_k) \cap A_k = \varnothing$. 这样便能形成一个闭球套

$$\overline{B}(x_{k+1}, r_{k+1}) \subseteq \overline{B}(x_k, r_k), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

由定理 (1.4.5) 知, 存在唯一的 $x \in \mathscr{X}$ 且 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n)$. 而对于任意的 $k \geqslant 1$, $x \notin A_k$, 从而 $x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \mathscr{X}$, 这便产生了矛盾. 于是若 $\mathscr{X}$ 是完备的度量空间, 则不能写成可数个疏集的并, 即 $\mathscr{X}$ 是第二纲的. □

定理 1.4.7 (Hausdorff). 设 $\mathscr{X}$ 为度量空间, 则其中的列紧集必完全有界. 进一步地, 如果 $\mathscr{X}$ 是完备的, 则其中的完全有界集一定为列紧的.

证明. 假设 A 为列紧集但不是完全有界的, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 A 不能被以 A 中有限个点为圆心, ε_0 为半径的球覆盖. 因此, 对于任意的 $x_1 \in A$, 存在点 $x_2 \in A \setminus B(x_1, \varepsilon_0)$. 类似地, 存在点 $x_k \in A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} B(x_i, \varepsilon_0)$. 这样, 我们就得到了一个点列 $\{x_n\}$, 满足

$$d(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon_0, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

则 $\{x_n\}$ 不存在收敛子列, 这与 A 为列紧集矛盾! 因此 A 是完全有界的.

另一方面, 设 A 是完备的且 A 是 $\mathscr{X}$ 中的完全有界集, 则对于 A 中任意的点列 $\{x_n\}$, 由 A 是完全有界集知, $\forall n \geqslant 1$, 都存在 A 的有限 $\dfrac{1}{n}$-网. 特别地, 当 $n = 1$ 时, A 有有限的 1-网, 记作 N_1. 由于 $\{x_n\}$ 为无穷点列而 N_1 中仅有有限多个点, 因此存在 $y_1 \in N_1$, 使得 $B(y_1, 1)$ 包含 $\{x_n\}$ 中无限多个点, 记 $S_1 = \{x_n\} \cap B(y_1, 1)$. 类似地, 存在 A 的有限 $\dfrac{1}{n}$-网 N_n, 以及 $y_n \in N_n$, 使得 $B\left(y_n, \dfrac{1}{n}\right)$ 中包含了 S_{n-1} 中无穷个点, 并记为

$$S_n = S_{n-1} \cap B\left(y_n, \frac{1}{n}\right).$$

取 $x_{n_1} \in S_1$, $x_{n_2} \in S_2 \setminus \{x_{n_1}\}$, $\cdots$, $x_{n_k} \in S_k \setminus \{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_{k-1}}\}$, $\cdots$, 便得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足 $\forall k \geqslant l$,

$$x_{n_k} \in B\left(y_k, \frac{1}{k}\right) \subset B\left(y_l, \frac{1}{l}\right), \quad x_{n_l} \in B\left(y_l, \frac{1}{l}\right).$$

从而 $d(x_{n_k}, x_{n_l}) \leqslant \dfrac{2}{l} \to 0(l \to \infty)$, 故 $\{x_{n_k}\}$ 为 Cauchy 列. 而 $\mathscr{X}$ 是完备的, 则存在 $x \in \mathscr{X}$, 使得 $x_{n_k} \to x(n \to \infty)$. 即对于 $\mathscr{X}$ 中任一点列, 均存在其内部收敛的子列, 故 $\mathscr{X}$ 是列紧的. □

接下来来看 ℓ^p 中的列紧集的性质. 设 $A \subset \ell^p$, 如果 A 是列紧的, 根据定理 (1.4.7) 得知, A 一定是完全有界的. 再根据定理 (1.4.2) 得知, A 一定是有界的. 另外, 根据完全有界的定义得知: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在有限个点 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(n_\varepsilon)}$, 对任意的 $\boldsymbol{x} \in A$, 都存在 $1 \leqslant k \leqslant n_\varepsilon$, 使得

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j - x_j^{(k)} \right|^p < \varepsilon^p.$$

上面的性质也等价于

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} B(\boldsymbol{x}^{(j)}, \varepsilon).$$

除了这点, ℓ^p 中的列紧集的性质还具有“余项一致小”的性质, 见如下的定理.

定理 1.4.8. 设 $A \subset \ell^p$, 则 A 是列紧的 $\iff$ A 是有界的, 且对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \geqslant 1$, 使得对任意的 $n \geqslant N$, 都有

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^p < 2^{p+1}\varepsilon^p, \quad \forall \boldsymbol{x} \in A.$$

证明该定理之前, 需要先指出一个重要的不等式[1]:

$$|a+b|^p \leqslant 2^{p-1}(|a| + |b|), \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

这可以通过对 $|\boldsymbol{x}|^p (1 \leqslant p < \infty)$ 使用 Jensen 不等式得到. 下面回到原定理的证明.

证明. (必要性) 设 A 是列紧的, 则 A 是完全有界的. 因此对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在有限个点 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(n_\varepsilon)}$, 对任意的 $\boldsymbol{x} \in A$, 都存在 $1 \leqslant k \leqslant n_\varepsilon$, 使得

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j - x_j^{(k)} \right|^p < \varepsilon^p.$$

[1]或许有读者会发现该不等式和概率论中用到的 C_R 不等式极为相像.

对余项进行估计, 得

$$\begin{aligned}\sum_{j=n+1}^{\infty}|x_j|^p &= \sum_{j=n+1}^{\infty}\left|x_j - x_j^{(k)} + x_j^{(k)}\right|^p \\ &\leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty}\left\{2^p\cdot\left(\left|x_j - x_j^{(k)}\right|^p + \left|x_j^{(k)}\right|^p\right)\right\} \\ &= 2^p\cdot\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|x_j - x_j^{(k)}\right|^p + \sum_{j=n+1}^{\infty}\left|x_j^{(k)}\right|^p\right) \\ &\leqslant 2^p\cdot\left(\varepsilon^p + \sum_{j=n+1}^{\infty}\left|x_j^{(k)}\right|^p\right).\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{x}^{(k)}\in A\subset \ell^p$ 知, 对任意的 $1\leqslant k\leqslant n_\varepsilon$, 存在 $N_k\geqslant 1$, 使得对任意的 $n\geqslant N_k$, 都有

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|x_j^{(k)}\right|^p < \varepsilon^p.$$

取 $N=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n_\varepsilon} N_k$, 则当 $n\geqslant N$ 时, 有

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}|x_j|^p \leqslant 2^p\cdot(\varepsilon^p+\varepsilon^p) = 2^{p+1}\varepsilon^p.$$

(**充分性**) 设对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\geqslant 1$, 使得对任意的 $n\geqslant N$, 都有

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}|x_j|^p < 2^{p+1}\varepsilon^p, \quad \forall \boldsymbol{x}\in A.$$

令 $B=\{(x_1,x_2,\cdots,x_N)|\boldsymbol{x}\in A\}\subset\mathbb{R}^N$, 则对任意的 $\boldsymbol{x}\in B$, 有

$$\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant N\cdot\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

由 A 有界知, 存在 $M>0$, 使得

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})\leqslant M, \quad \forall \boldsymbol{x}\in A.$$

因此对任意的 $\boldsymbol{x}\in B$, 有

$$\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant N\cdot M,$$

此即说明 $B \subset \mathbb{R}^n$ 是有界的, 而 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集一定是列紧的. 更进一步, 还可以推出 B 是完全有界的. 因此, 对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 B 的有限 ε-网

$$\{\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(n_\varepsilon)}\} \subset B,$$

也即对任意的 $\boldsymbol{x} \in B$, 存在 $1 \leqslant k \leqslant n_\varepsilon$, 使得

$$\sum_{j=1}^{N} \left|x_j - x_j^{(k)}\right|^2 < \varepsilon^2.$$

接下来, 把 B 中的元素延拓到 A 中. 对任意的 $1 \leqslant k \leqslant n_\varepsilon$, 存在 $\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(k)}$, 使得

$$\widetilde{x}_j^{(k)} = x_j^{(k)}, \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant N.$$

因此考虑

$$\{\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(1)}, \widetilde{\boldsymbol{x}}^{(2)}, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{x}}^{(n)}\} \subset A,$$

我们接下来需要说明这是 A 的某个 $\tilde{\varepsilon}$-网. 对任意的 $\tilde{\boldsymbol{x}} \in A$, 存在 $\boldsymbol{x} \in B$, 使得

$$\widetilde{x}_j = x_j, \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant N.$$

因此存在 $1 \leqslant k \leqslant n_\varepsilon$, 使得

$$\sum_{i=1}^{N} \left|x_j - x_j^{(k)}\right|^2 < \varepsilon^2$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \left|\widetilde{x}_j - \widetilde{x}_j^{(k)}\right|^p &= \sum_{j=1}^{N} \left|\widetilde{x}_j - \widetilde{x}_j^{(k)}\right|^p + \sum_{j=N+1}^{\infty} \left|\widetilde{x}_j - \widetilde{x}_j^{(k)}\right|^p \\
&\leqslant N \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} \left|\widetilde{x}_j - \widetilde{x}_j^{(k)}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} + 2^p \cdot \sum_{j=N+1}^{\infty} \left(|\widetilde{x}_j|^p + \left|\widetilde{x}_j^{(k)}\right|^p\right) \\
&\leqslant N \cdot \varepsilon^p + 2^p \cdot \left(2^{p+1}\varepsilon^p + 2^{p+1}\varepsilon^p\right) \\
&= (N + 2^{2p+2})\varepsilon^p,
\end{aligned}$$

从而 $\{\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(1)}, \widetilde{\boldsymbol{x}}^{(2)}, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{x}}^{(n)}\}$ 是 A 的 $\tilde{\varepsilon} = (N + 2^{2p+2})^{\frac{1}{p}} \cdot \varepsilon$-网. □

• **例 14.** 证明: 序列空间 (s) 中的子集 A 是列紧的充分必要条件是: $\forall n \geqslant 1$, 存在 $C_n > 0$, 使得对任何 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in A$, 都有 $|x_n| \leqslant C_n$.

1.4.2 紧性

现在将关注点放在紧性上, 首先给出紧集的定义.

定义 1.4.4. 称 $A \subset \mathscr{X}$ 是**紧子集**, 如果对 A 的任一开覆盖都存在有限子覆盖.

对于紧集的判断, 有如下的定理.

定理 1.4.9. 设 $\mathscr{X}$ 是度量空间, $A \subset \mathscr{X}$, 则 A 是紧的 $\Longleftrightarrow$ A 是自列紧的.

证明. 设 A 是自列紧的, 如果存在 A 的某个开覆盖 $A \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ 不存在有限子覆盖, 由于 A 是自列紧的, 对任意的 $n \geqslant 1$, A 存在有限的 $\dfrac{1}{n}$-网

$$N_n = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_{k(n)}^{(n)}\},$$

也即 $A \subset \bigcup\limits_{y \in N_n} B\left(y, \dfrac{1}{n}\right)$. 因此, 对任意的 $n \geqslant 1$, 存在 $y_n \in N_n$, 使得 $B\left(y_n, \dfrac{1}{n}\right)$ 不能被有限个 G_λ 所覆盖. 由假设 A 是自列紧的, 存在 $\{y_n\}$ 的收敛子列 $\{y_{n_k}\}$ 收敛于 A 中某点 $y_0 \in G_{\lambda_0}$. 由于 G_{λ_0} 是开集, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(y_0, \delta) \subset G_{\lambda_0}$. 对上述 δ, 取 k 充分大, 满足 $n_k > \dfrac{2}{\delta}$, 且 $d(y_{n_k}, y_0) < \dfrac{\delta}{2}$. 则对任何 $x \in B\left(y_{n_k}, \dfrac{1}{n_k}\right)$, 有

$$d(x, y_0) \leqslant d(x, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y_0) \leqslant \frac{1}{n_k} + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

即对任何 $x \in B\left(y_{n_k}, \dfrac{1}{n_k}\right)$, 有 $x \in B(y_0, \delta)$. 从而, $B\left(y_{n_k}, \dfrac{1}{n_k}\right) \subset B(y_0, \delta) \subset G_{\lambda_0}$, 这与每个 $B\left(y_n, \dfrac{1}{n}\right)$ 不能被有限个 G_λ 所覆盖相矛盾.

反过来, 如果 A 具有有限开覆盖性质, 则对 A 中的任何点列 $\{x_n\}$, 我们要证明它在 A 中具有收敛的点列. 事实上, 如果它的任何子列都在 A 中不收敛, 则对任何 $y \in A$, 都存在 $\delta_y > 0$, 使得 $B(y, \delta_y)$ 中不包含 $\{x_n\}$ 中异于 y 的点. 否则, 存在 $y \in A$, 使得对 y 的任何邻域, 都包含 $\{x_n\}$ 中异于 y 的点, 这个点 y 就是 $\{x_n\}$ 的极限点, 这与 $\{x_n\}$ 不存在收敛于 A 中某点的子列的假设矛盾. 显然, $\{B(y, \delta_y), y \in A\}$ 是 A 的一个开覆盖, 从而, 由 A 是紧集知存在有限子覆盖, 即存在 $y_1, \cdots, y_n \in A$, 使得

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \delta_{y_i}).$$

由 $B(y_i, \delta_{y_i})$ 的选取知, 每个最多只包含 $\{x_n\}$ 中一个点. 于是, $\{x_n\}$ 中只有有限个不同的点, 必然至少有一个点重复出现了无穷多次, 从而 $\{x_n\}$ 有收敛于 A 中某点的子列, 这与假设 $\{x_n\}$ 的任何子列都在 A 中不收敛相矛盾. □

该定理的一个推论是, $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集一定是紧集, 这是因为它是列紧的, 同时又是闭集, 因此它是自列紧的.

1.5　$C([a,b];\mathbb{R}^d)$ 空间

首先, 我们记由 $[a,b]$ 上所有连续函数构成的空间为 $C([a,b];\mathbb{R}^d)$, 即

$$C([a,b];\mathbb{R}^d) := \left\{u : [a,b] \to \mathbb{R}^d \,\middle|\, u \text{ 在 } [a,b] \text{ 上连续}\right\}.$$

则不难证明, 闭区间上的连续函数 $u : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ 具有以下三个性质:

(1) u 在 $[a,b]$ 上有界;

(2) u 在 $[a,b]$ 上可以取到最大值与最小值;

(3) u 在 $[a,b]$ 上一致连续.

在这里, 我们仅对于前两条给出证明.

证明. (1) 根据有限覆盖定理, $\mathbb{R}$ 上的闭区间 $[a,b]$ 可以由有限的闭区间进行覆盖, 设其分别为 $K_j = [x_j - d_j, x_j + d_j] (j = 1, 2, \cdots, s)$. 则有

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} K_j.$$

由于 u 为连续函数, 因此当 $x \in B(x_j, d_j)$ 时, 存在 δ_j 使得 $u(x) \in B(u(x_j), \delta_j)$. 故

$$u(x) \in \bigcup_{j=1}^{s} B(u(x_j), \delta_j).$$

因此,

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant s} \{u(x_j) - \delta_j\} \leqslant u(x) \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant s} \{u(x_j) + \delta_j\},$$

即 $u(x)$ 有界.

(2) 由于 $u(x)$ 有界, 因此设

$$m = \inf_{x \in [a,b]} u(x), \quad M = \sup_{x \in [a,b]} u(x),$$

只需证明, 存在 $x_*, x^* \in [a,b]$, 使得 $u(x_*) = m$, $u(x^*) = M$.

根据下确界的定义, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x \in [a,b]$, 使得 $u(x) < m + \varepsilon$. 于是令 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, 得到 $m \leqslant u(x_n) < m + \frac{1}{n}(n \in \mathbb{N}^*)$. 则当 $n \to \infty$ 时, $u(x_n) \to m$. 又由于 $[a,b]$ 是紧的, 因此存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ 及 $x_* \in [a,b]$, 使得 $x_{n_j} \to x_*$. 又由于 $u \in C([a,b])$, 因此 $u(x_{n_j}) \to u(x_*)$. 根据极限的唯一性, $u(x_*) = m$. 同理可证, 存在 $x^* \in [a,b]$, 使得 $u(x^*) = M$. 故 u 在 $[a,b]$ 上可以取到最大最小值. □

任取 $x, y \in C([a,b];\mathbb{R}^d)$, 我们定义

$$d(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| = \max_{t\in[a,b]} \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j(t) - y_j(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$ [2]

其中 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_d(t)), y(t) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_d(t))$.

容易验证, 上述定义的 d 满足度量的三个条件, 因此, $C([a,b];\mathbb{R}^d)$ 为度量空间. 下面, 我们就要研究这个度量空间中的相关性质.

定理 1.5.1. *度量空间 $C([a,b];\mathbb{R}^d)$ 是可分的.*

证明. 任取 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_d(t))$, 则对于 $1 \leqslant i \leqslant d$, $x_i(t) \in C([a,b];\mathbb{R})$. $\forall \varepsilon > 0$, 根据 Weierstrass 逼近定理, 存在 n 次多项式 $p_i^{(n)} \in P_n([a,b])$, 这里的 $P_n([a,b])$ 表示 $[a,b]$ 区间上所有实系数 n 次多项式构成的集合, 使得

$$d(x_i, p_i^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又对于任意的 n 次多项式 $p^{(n)}(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, 存在 n 次有理系数多项式 $q^{(n)}(t) = r_0 + r_1 t + \cdots + r_n t^n \in \mathbb{Q}_n([a,b])$, 这里 $\mathbb{Q}_n([a,b])$ 表示 $[a,b]$ 上所有 n 次有理系数多项式构成的集合, 使得

$$\begin{aligned} \max_{t\in[a,b]} |p^{(n)}(t) - q^{(n)}(t)| &= \max_{t\in[a,b]} \left| \sum_{i=0}^{n} (a_i - r_i) t^i \right| \\ &\leqslant \max_{t\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |a_i - r_i| \cdot |t^i| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n} |a_i - r_i| \cdot \max_{t\in[a,b]} |t^i|. \end{aligned}$$

[2] 由连续性知, $|x(t) - y(t)|$ 的最大值可以在 $[a,b]$ 取到, 因此定义距离时我们用 max 而非 sup.

因此, 对于给定的 $0 \leqslant i \leqslant n$, 只需令 $|a_i - r_i| < \dfrac{\varepsilon}{\max|t^i| \cdot (n+1)}$, 则有

$$\max_{t\in[a,b]} |p^{(n)}(t) - q^{(n)}(t)| < \varepsilon.$$

上述推导过程说明了, 对于 $x(t)$ 的每个分量 $x_i(t)$, 都用一个 n 次多项式 $p_i^{(n)}(t)$ 进行逼近, 而这个实系数多项式又可以用一个 n 次有理系数多项式 $q_i^{(n)}(t)$ 逼近.

故 $\forall x(t) \in C([a,b];\mathbb{R}^d)$, 可以找出一个 d 维有理系数 n 次多项式泛函

$$q(t) = \left(q_1^{(n)}(t), q_2^{(n)}(t), \cdots, q_d^{(n)}(t)\right) \in \mathbb{Q}_n^d([a,b]) = \overbrace{\mathbb{Q}_n([a,b]) \times \cdots \times \mathbb{Q}_n([a,b])}^{d\text{个可数集合的笛卡尔积}},$$

使得 $d(x(t), q(t)) < \varepsilon$. 又由于 $\mathbb{Q}_n([a,b])$ 与 $\mathbb{Q}^n$ 等势, 则 $\mathbb{Q}_n([a,b])$ 可数. 故 d 个 $\mathbb{Q}_n([a,b])$ 的笛卡尔积 $\mathbb{Q}_n^d([a,b])$ 也是可数集.

于是 $\mathbb{Q}_n^d([a,b])$ 是 $C([a,b];\mathbb{R}^d)$ 的一个可数稠密子集, 故度量空间 $C([a,b];\mathbb{R}^d)$ 是可分的. □

定理 1.5.2. 度量空间 $C([a,b];\mathbb{R}^d)$ 是完备的.

证明. 假设 $\{x^{(n)}\} \subset C([a,b];\mathbb{R}^d)$ 为 Cauchy 列, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, 使得对任意的 $m, n \geqslant N$, 有

$$d(x^{(m)}, x^{(n)}) = \max_{t\in[a,b]} \left|x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)\right| < \varepsilon.$$

则对于任意的 $1 \leqslant j \leqslant d$, 有

$$\max_{t\in[a,b]} \left|x_j^{(n)}(t) - x_j^{(m)}(t)\right| < \varepsilon.$$

则对于 $t \in [a,b]$, 数列 $\left\{x_j^{(n)}(t)\right\}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 Cauchy 列. 由于 $\mathbb{R}$ 是完备的, 因此存在 $\widetilde{x}_j(t) \in \mathbb{R}$, 使得

$$x_j^{(n)}(t) \to \widetilde{x}_j(t)(n \to \infty).$$

对于 $[a,b]$ 中的每个 t, 都存在这样的极限 $\widetilde{x}_j(t)$, 因此可以定义关于 t 的函数

$$x_j(t) = \widetilde{x}_j(t), \quad t \in [a,b].$$

由于对于 $t \in [a,b]$, 有 $\left|x_j^{(n)}(t) - x_j^{(m)}(t)\right| < \varepsilon$, 因此令 $m \to \infty$, 则有

$$\left|x_j^{(n)}(t) - x_j(t)\right| \leqslant \varepsilon.$$

故对于任意的 $t\in[a,b]$, $\left|x^{(n)}(t)-x(t)\right|\leqslant\sqrt{n}\cdot\varepsilon$, 则

$$d\left(x^{(n)},x\right)=\max_{t\in[a,b]}\left|x^{(n)}(t)-x(t)\right|\leqslant\sqrt{n}\cdot\varepsilon.$$

且由于 N 的取值仅与 ε 有关, 而与 t 无关, 因此 $x^{(n)}$ 一致收敛于 x. 从而 $x\in C([a,b];\mathbb{R}^d)$, 完备性得证. □

定义 1.5.1. 设函数族 $A\subset C([a,b];\mathbb{R}^d)$, 称集合 A 具有**等度连续性**, 如果对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得 $\forall t_1,t_2\in[a,b]$ 且

$$|t_1-t_2|<\delta,$$

都有

$$|u(t_1)-u(t_2)|_{\mathbb{R}^d}<\varepsilon,\quad\forall u\in A.$$

容易发现, 等度连续是针对函数族的, 且一个等度连续的集合中每个元素均为一致连续的.

定理 1.5.3 (Arzela-Ascoli). 设 $A\subset C([a,b];\mathbb{R})$, 则 A 是列紧集当且仅当 A 有界[a]且等度连续.

[a]在一些教材中, 这样的有界被称作**一致有界**, 即对于任意的 $u\in A$ 及 $t\in[a,b]$, 都有 $|u(t)|\leqslant M$.

证明. $(\Rightarrow)$ 若 A 列紧, 则 A 为完全有界的, 则当然是有界的. 且 $\forall\varepsilon>0$, A 存在有限 ε-网, 记作 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset A$. 则 $\forall x\in A$, 存在 $1\leqslant j\leqslant n$, 使得

$$d(x,x_j)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-x_j(t)|<\varepsilon.$$

$\forall x_j\in A$, 显然 x_j 在 $[a,b]$ 上是一致连续的. 故对上述 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_j>0$, 只要 $|t_1-t_2|<\delta_j$, 便有

$$|x_j(t_1)-x_j(t_2)|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\delta_j$, 则 $\forall 1\leqslant j\leqslant n$ 以及 $t_1,t_2\in[a,b]$ 且 $|t_1-t_2|<\delta$, 有

$$|x_j(t_1)-x_j(t_2)|<\varepsilon.$$

故对任意的 $x\in A$, 只要 $t_1,t_2\in[a,b]$ 满足 $|t_1-t_2|<\delta$, 由三角不等式有

$$\begin{aligned}|x(t_1)-x(t_2)|&\leqslant|x(t_1)-x_j(t_1)|+|x(t_2)-x_j(t_2)|+|x_j(t_1)-x_j(t_2)|\\&\leqslant 2d(x_j,x)+\varepsilon<3\varepsilon.\end{aligned}$$

即 A 是等度连续的. 必要性得证.

($\Leftarrow$) 由于 A 有界, 因此设对任意的 $u\in A$ 以及 $t\in[a,b]$, 有 $|u(t)|\leqslant M$. 又由于 A 等度连续, 则对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对 $t_1,t_2\in[a,b]$ 且当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时

$$|u(t_1)-u(t_2)|<\varepsilon,\quad \forall u\in A.$$

对于区间 $[a,b]$, 可将其进行划分 $a=t_1<t_2<\cdots<t_n=b$, 满足

$$|t_{i+1}-t_i|\leqslant\frac{\delta}{2},\quad 1\leqslant i\leqslant n-1.$$

构造集合

$$B=\big\{\boldsymbol{x}=\big(u(t_1),u(t_2),\cdots,u(t_n)\big)\big|u\in A\big\}\subset\mathbb{R}^n,$$

则任取 $\boldsymbol{x}\in B$, 有

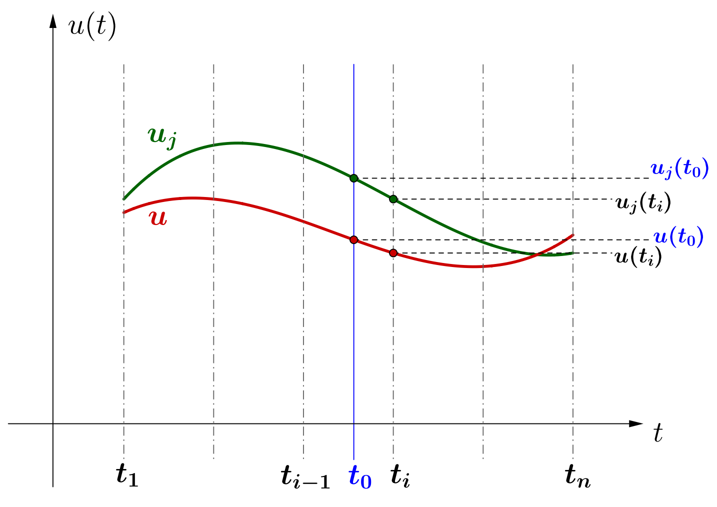
$$|\boldsymbol{x}|_{\mathbb{R}^n}=\left(\sum_{i=1}^n|u(t_i)|^2\right)^{\frac12}\leqslant\sqrt{n}\max_{t\in[a,b]}|u(t)|\leqslant\sqrt{n}\cdot M,$$

即 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集, 则 B 是完全有界的. 于是存在 u_1, u_2, $\cdots$, $u_k\in A$, 使得

$$\big\{\widetilde{\boldsymbol{x}}_j=\big(u_j(t_1),u_j(t_2),\cdots,u_j(t_n)\big)\big|1\leqslant j\leqslant k\big\}$$

为 B 的 ε-网, 即有

$$B\subset\bigcup_{j=1}^k B(\widetilde{\boldsymbol{x}}_j,\varepsilon).$$



则对任意的 $u\in A$, 存在 $1\leqslant j\leqslant k$, 使得

$$d(\boldsymbol{x}, \widetilde{\boldsymbol{x}}_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u_j(t_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon. \tag{1.1}$$

因此显然有 $|u(t_i) - u_j(t_i)| < \varepsilon$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$ 均成立.

设 $\max\limits_{t \in [a,b]} |u(t) - u_j(t)|$ 在 $t_0 \in [a, b]$ 处取到, 并设 $t_0 \in [t_{i-1}, t_i]$, 此时,

$$\begin{aligned} d(u, u_j) = \max_{t \in [a,b]} |u(t) - u_j(t)| &= |u(t_0) - u_j(t_0)| \\ &\leqslant |u(t_0) - u(t_i)| + |u(t_i) - u_j(t_i)| + |u_j(t_i) - u_j(t)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.2}$$

最后一个不等号 $|u(y_0) - u(t_i)| < \varepsilon$ 以及 $|u_j(t_i) - u_j(t_0)| < \varepsilon$ 是由于 $|t_0 - t_i| \leqslant \dfrac{\delta}{2} < \delta$, 由 u 和 u_j 的等度连续性成立; $|u(t_i) - u_j(t_i)| < \varepsilon$ 是由于 (1.1) 式成立.

于是不等式 (1.2) 表明, $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\} \subset A$ 构成了 A 的一个 3ε-网. 根据 ε 的任意性, A 是完全有界的, 从而 A 为列紧的. 充分性得证. $\square$

1.6 Banach 压缩映像原理

定义 1.6.1. 设 $\mathscr{X}$ 是度量空间, $T : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 是映射, $x \in \mathscr{X}$, 称 x 是 T 的**不动点**, 如果 $Tx = x$.

定义 1.6.2. 设 $\mathscr{X}$ 是度量空间, 称映射 $T : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 是**压缩的**, 如果存在常数 $\alpha \in [0, 1]$, 使得对任意的 $x, y \in \mathscr{X}$, 都有

$$d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y).$$

称 α 是**压缩系数**. 如果 $\alpha \in [0, 1)$, 则称 T 是**严格压缩的**.

容易看出, 压缩映射一定是 Lipschitz 连续的.

定理 1.6.1. *设 $\mathscr{X}$ 是完备度量空间, $T : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 是严格压缩的, 则 T 在 $\mathscr{X}$ 中存在唯一不动点, 也即存在唯一的 $x^* \in \mathscr{X}$, 使得 $Tx^* = x^*$. 特别地, 对任何初值*

$x_0 \in \mathscr{X}$, 令 $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$, 则当 $n \to \infty$ 时有 $x_n \to x^*$, 且

$$d(x_n, x^*) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot d(Tx_0, x_0).$$

证明. (唯一性) 设 x, y 是 T 的不动点, 即 $Tx = x, Ty = y$, 则 $d(x,y) = d(Tx,Ty) < d(x,y)$, 从而 $d(x,y) = 0$, 因此 $x = y$.

(存在性) 下面证明 $\{x_n\}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的 Cauchy 列. 根据三角不等式, 有

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leqslant d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_n) \\ &\leqslant \cdots \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{p-1} d(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \end{aligned}$$

又其中

$$\begin{aligned} d(x_{n+j+1}, x_{n+j}) &= d(Tx_{n+j}, Tx_{n+j-1}) \\ &\leqslant \alpha \cdot d(x_{n+j}, x_{n+j-1}) \\ &\leqslant \alpha^{n+j} \cdot d(Tx_0, x_0), \end{aligned}$$

因此

$$d(x_{n+p}, x_n) \leqslant \sum_{j=0}^{p-1} \alpha^{n+j} \cdot d(Tx_0, x_0) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot d(Tx_0, x_0).$$

当 $n \to \infty$ 时, $d(x_{n+p}, x_n) \to 0$, 因此 $\{x_n\}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的 Cauchy 列. 由 $\mathscr{X}$ 的完备性知, 存在 $x^* \in \mathscr{X}$, 使得 $x_n \to x^*$. 在 $x_{n+1} = Tx_n$ 中, 令 $n \to \infty$, 得 $x^* = Tx^*$, 故 $x^* \in \mathscr{X}$ 是 T 的不动点. 在上式中, 再令 $p \to \infty$[3], 则

$$d(x_n, x^*) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot d(Tx_0, x_0).$$

从而定理中的不等式得证. □

- **例 15.** 设 $t_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f : \mathbb{R}^n \times [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ 是连续的, 且 f 关于第一变元是 Lipschitz 连续的, 也即存在 $L > 0$, 使得对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, 及 $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, 有

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})|_{\mathbb{R}^n} \leqslant L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|_{\mathbb{R}^n},$$

[3]这里用到了 d 的连续性.

则初值问题

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{y}(t) = f(\boldsymbol{y}(t), t), \\ \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

在 $[t_0-\beta, t_0+\beta]$ 内存在唯一的连续解, 其中 $\beta = \min\left\{\delta, \dfrac{1}{2L}\right\}$.

证明. 该问题在 $[t_0-\beta, t_0+\beta]$ 上的连续解等价于

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s)\mathrm{d}s$$

在 $[t_0-\beta, t_0+\beta]$ 上的连续解. 取 $\mathscr{X} = C([t_0-\beta, t_0+\beta]; \mathbb{R}^n)$, 令

$$(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s)\mathrm{d}s,$$

下面只需证明 T 是严格压缩的. 对任意的 $x, y \in \mathscr{X}$,

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max_{t\in[t_0-\beta, t_0+\beta]} |(Tx)(t) - (Ty)(t)| \\ &= \max_{|t-t_0|\leqslant\beta} \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(y(s), s) - f(x(s), s)\right) \mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant \max_{|t-t_0|\leqslant\beta} \left| \int_{t_0}^{t} |f(y(s), s) - f(x(s), s)| \, \mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant L \cdot \max_{|t-t_0|\leqslant\beta} \left| \int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)| \, \mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant L\beta \cdot d(x, y), \end{aligned}$$

其中 $L\beta < 1$. □

• **例 16.** 设 $f \in C([a,b])$, $k(x,y)$ 是定义在 $[a,b]\times[a,b]$ 上的二元函数, 且存在常数 $c > 0$, 使得对于任意的 $x \in [a,b]$, 有 $\displaystyle\int_a^b |k(x,y)|\mathrm{d}y \leqslant c$. 则当 $|\lambda| < \dfrac{1}{c}$ 时, 如下方程

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)\mathrm{d}t + f(x)$$

存在唯一连续解 $u \in C[(a,b)]$.

证明. 令

$$(Tu)(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)\mathrm{d}t + f(x),$$

则原方程等价于 $u = Tu$. 由于 $C([a,b]) = C([a,b];\mathbb{R})$ 是完备的度量空间, 因此要证 T 存在唯一不动点, 只需证明 T 为严格压缩的. 事实上,

$$\begin{aligned}
d(Tu,Tv) &= \max_{x\in[a,b]} |(Tu)(x) - (Tv)(x)| \\
&= \max_{x\in[a,b]} \left|\lambda \int_a^b k(x,t)(u(t)-v(t))\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant |\lambda| \max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,t)|\cdot|u(t)-v(t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant |\lambda|\cdot d(u,v) \max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant |\lambda| c\cdot d(u,v) < d(u,v).
\end{aligned}$$

因此 T 为严格压缩映射. 根据 Banach 不动点定理, T 在 $C([a,b])$ 存在唯一不动点. □

- **例 17.** 设 $f \in C([a,b])$, $k(t,s)$ 为定义在三角区域 $D = \left\{(t,s) \,\middle|\, \begin{array}{l} a\leqslant t\leqslant b \\ a\leqslant s\leqslant t\end{array}\right\}$ 上的二元连续函数, 则 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, 方程

$$x(t) = \lambda\int_a^t k(t,s)x(s)\mathrm{d}s + f(t)$$

存在唯一连续解 $x \in C([a,b])$.

定理 1.6.2. 设 $\mathscr{X}$ 为完备的度量空间, 映射 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$. 如果存在某个 $n_0 \geqslant 2$, 使得 T^{n_0} 为严格压缩, 则 T 在 $\mathscr{X}$ 中有唯一不动点.

证明. 由于 $\mathscr{X}$ 完备且 T^{n_0} 为严格压缩, 因此由 Banach 不动点定理, 映射 T^{n_0} 有唯一不动点 x^*, 即 $T^{n_0}x^* = x^*$. 两边同时作用于 T, 得到

$$T(T^{n_0}x^*) = T^{n_0}(Tx^*) = Tx^*,$$

即 Tx^* 也为 T^{n_0} 的不动点. 根据 T^{n_0} 不动点的唯一性, 有 $Tx^* = x^*$. 即 x^* 为 T 的不动点. 存在性得证.

假设 x 为 T 的不动点, 则容易验证 x 也为 T^{n_0} 的不动点. 设 x_1, x_2 均为 T 的不动点, 则 x_1, x_2 也均为 T^{n_0} 的不动点. 根据 T^{n_0} 不动点的唯一性, 有 $x_1 = x_2$. 故 T 的不动点的唯一性得证. □

1.7 度量空间的完备化

定义 1.7.1. 设 $(\mathscr{X},d)$, $(\mathscr{Y},\rho)$ 均为度量空间, 称映射 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 为**等距的**, 若

$$\rho(Tx,Ty)=d(x,y),\quad \forall x,y\in\mathscr{X}.$$

进一步, 如果 T 为同胚[a]的, 则称 T 为 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的**等距同构**, 并称度量空间 $(\mathscr{X},d)$ 与 $(\mathscr{Y},\rho)$ 是**等距同构**的.

[a]同胚是指映射 T 为双射, 且 T 和 T^{-1} 均连续.

定义 1.7.2. 设 $(\mathscr{X},d)$ 与 $(\mathscr{Y},\rho)$ 为度量空间, 称 $\mathscr{Y}$ 是 $\mathscr{X}$ 的**完备化空间**, 如果

(1) $(\mathscr{Y},\rho)$ 是完备的;

(2) $(\mathscr{X},d)$ 等距同构于 $(\mathscr{Y},\rho)$ 的一个稠密子空间 $(\mathscr{Y}_1,\rho)$.

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{X},d) \arrow[r, "T"] \arrow[d, dashed, "?"] & (\mathscr{Y}_1,\rho) \arrow[d, "\text{稠密子空间}"] \\
T^{-1}(\mathscr{Y}) & (\mathscr{Y},\rho) \arrow[l, "T^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

定理 1.7.1. 任何度量空间均存在完备化空间, 且在等距同构的意义下, 完备化的度量空间是唯一的.

证明. 假设 $(\mathscr{X},d)$ 为度量空间, 令 $\mathscr{Z}=\big\{\{x_n\}\,\big|\,\{x_n\}\subset\mathscr{X}$ 为 Cauchy 列$\big\}$, 并定义

$$\{x_n\}\sim\{y_n\},\quad \text{iff.}\quad \lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0.$$

我们先验证上述定义的 $\sim$ 是 $\mathscr{Z}$ 上的等价关系, 则只需要证明 $\sim$ 满足反身性, 对称性, 传递性. 事实上, 反身性, 对称性是显然的, 而传递性轻易可以通过距离的三角不等式得到. 因此 $\sim$ 为 $\mathscr{Z}$ 上的等价关系. 故构造商集

$$\mathscr{Y}:=\mathscr{X}/\sim=\left\{\widetilde{\{x_n\}}\,\middle|\,\{x_n\}\text{ 为 }\mathscr{X}\text{ 中的 Cauchy 列}\right\}.$$

任取 $\widetilde{\{x_n\}},\widetilde{\{y_n\}}\in\mathscr{Y}$, 定义

$$\rho(\widetilde{\{x_n\}},\widetilde{\{y_n\}})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n).\tag{1.3}$$

要想证明上式中定义的 ρ 为 $\mathscr{Y}$ 上的距离, 首先需要证明极限存在. 由于

$$|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)| \leqslant d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m) \to 0 \quad (m,n\to\infty).$$

因此 $\{d(x_n,y_n)\}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 Cauchy 列, 故 (1.3) 中极限存在. 其次需要验证 ρ 对同一个等价类中不同元素的取值相同. 假设 $\{x_n\}\sim\{x'_n\}$, $\{y_n\}\sim\{y'_n\}$, 由于

$$|d(x_n,y_n)-d(x'_n,y'_n)| \leqslant d(x_n,x'_n)+d(y_n,y'_n) \to 0 \quad (n\to\infty).$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n,y'_n)$, 即 $\rho\left(\widetilde{\{x_n\}},\widetilde{\{y_n\}}\right)=\rho\left(\widetilde{\{x'_n\}},\widetilde{\{y'_n\}}\right)$. 因此 (1.3) 定义的 ρ 有意义. 而要想证明 ρ 可以作为 $\mathscr{Y}$ 上的距离, 还需要证明其满足距离的正定性, 对称性与三角不等式. 事实上, 根据定义, 正定性与对称性是显然的, 下面证明三角不等式:

任取 $\widetilde{\{x_n\}},\widetilde{\{y_n\}},\widetilde{\{z_n\}}\in\mathscr{Y}$, 有

$$\begin{aligned}\rho\left(\widetilde{\{x_n\}},\widetilde{z_n}\right)&=\lim_{n\to\infty} d(x_n,z_n)\\&\leqslant \lim_{n\to\infty}\big(d(x_n,y_n)+d(y_n,z_n)\big)\\&=\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)+\lim_{n\to\infty} d(y_n,z_n)\\&=\rho\left(\widetilde{\{x_n\}},\widetilde{\{y_n\}}\right)+\rho\left(\widetilde{\{y_n\}},\widetilde{\{z_n\}}\right).\end{aligned}$$

于是三角不等式也成立. 故 $(\mathscr{Y},\rho)$ 为度量空间.

下面构造 $(\mathscr{Y},\rho)$ 的稠密子空间 $(\mathscr{Y}_1,\rho)$. 对于任意的 $x\in\mathscr{X}$, 显然 $\{x\}$ 为 $\mathscr{X}$ 中的 Cauchy 列. 为了便于表示, 记 $\widetilde{x}=\widetilde{\{x\}}$. 令 $\mathscr{Y}_1=\{\widetilde{x}\,|\,x\in\mathscr{X}\}$, 并定义

$$\begin{aligned}T:\ \mathscr{X}&\to\mathscr{Y}_1,\\ x&\mapsto\widetilde{x}.\end{aligned}$$

则

$$\rho(Tx,Ty)=\rho\left(\widetilde{x},\widetilde{y}\right)=\lim_{n\to\infty} d(x,y)=d(x,y).$$

故 T 为等距的双射. 从而 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}_1$ 为等距同构.

下面证明上述构造的 $\mathscr{Y}_1$ 在 $\mathscr{Y}$ 中稠密. 对于任意的 $\varepsilon>0$ 以及 $\widetilde{\{x_n\}}\in\mathscr{Y}$, 根据定义, $\{x_n\}$ 为 $\mathscr{X}$ 中的 Cauchy 列. 从而存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 对 $n,m\geqslant N$, 有 $d(x_n,x_m)<\varepsilon$. 故

$$\rho\left(\widetilde{x_n},\widetilde{\{x_m\}}\right)=\lim_{m\to\infty} d(x_n,x_m)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

因此 $\mathscr{Y}_1$ 在 $\mathscr{Y}$ 中稠密.

最后我们证明 $\mathscr{Y}$ 是完备的. 设 $\{\boldsymbol{\xi}_n\}$ 为 $\mathscr{Y}$ 中的 Cauchy 列, 由 $\mathscr{Y}_1$ 的稠密性, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 都存在 $\widetilde{x_n} \in \mathscr{Y}_1$, 满足

$$\rho\left(\boldsymbol{\xi}_n, \widetilde{x_n}\right) < \frac{1}{n}.$$

从而

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) = \rho\left(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n}\right) &\leqslant \rho\left(\widetilde{x_n}, \boldsymbol{\xi}_n\right) + \rho(\boldsymbol{\xi}_n, \boldsymbol{\xi}_m) + \rho\left(\boldsymbol{\xi}_m, \widetilde{x_m}\right) \\ &< \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \rho(\boldsymbol{\xi}_n, \boldsymbol{\xi}_m) \to 0 \quad (n, m \to \infty). \end{aligned}$$

从而 $\{x_n\}$ 为 $\mathscr{X}$ 中的 Cauchy 列, 则 $\widetilde{\{x_n\}} \in \mathscr{Y}$. 而

$$\rho\left(\boldsymbol{\xi}_k, \widetilde{\{x_n\}}\right) \leqslant \rho\left(\boldsymbol{\xi}_k, \widetilde{x_k}\right) + \rho\left(\widetilde{x_k}, \widetilde{\{x_n\}}\right) < \frac{1}{k} + \lim_{n\to\infty} d(x_k, x_n) \to 0 \quad (k \to \infty).$$

故 $\mathscr{Y}$ 是完备的, 定理中完备的度量空间存在性得证.

最后, 我们来说明这个空间在等距同构的意义下是唯一的. 如果还存在 $\mathscr{X}$ 的另一个完备化空间 $(\widetilde{\mathscr{Y}}, \widetilde{\rho})$, 则 $\mathscr{X}$ 等距同构于 $(\widetilde{\mathscr{Y}}, \widetilde{\rho})$ 的一个稠密子空间 $(\widetilde{\mathscr{Y}_1}, \widetilde{\rho})$, 从而 $(\mathscr{Y}_1, \rho)$ 等距同构于 $(\widetilde{\mathscr{Y}_1}, \widetilde{\rho})$. 设

$$T : \mathscr{Y}_1 \to \widetilde{\mathscr{Y}_1}, \xi \mapsto T(\xi)$$

是等距同构的, 接下来将 T 延拓到 $\mathscr{Y}$ 上. 根据 Y_1 的稠密性, 对任意的 $y \in \mathscr{Y}$, 存在 $\{\xi_n\} \subset \mathscr{Y}_1$, 使得在 $\mathscr{Y}$ 中, 有 $\xi_n \to y$. 从而定义

$$\widetilde{T} : \mathscr{Y} \to \widetilde{\mathscr{Y}}, y \mapsto \lim_{n\to\infty} T(\xi_n),$$

则 $\widetilde{T}$ 是 $\mathscr{Y}$ 到 $\widetilde{\mathscr{Y}}$ 的一个等距同构. □

第二章　赋范线性空间

2.1　范数与半范数

定义 2.1.1. 设 $\mathscr{X}$ 是数域 K 上的线性空间, $P:\mathscr{X}\to\mathbb{R}$, 如果它满足

(1) (次可数可加性) $P(x+y)\leqslant P(x)+P(y),\forall x,y\in\mathscr{X}$;

(2) (齐次性) $P(\alpha x)=|\alpha|P(x)$,

则称 P 是 $\mathscr{X}$ 上的**半范数**.

以下是半范数的几个基本性质.

定理 2.1.1. *如果 P 是 $\mathscr{X}$ 上的一个半范数, 则*

(1) $P(0)=0$;

(2) $P(x)\geqslant 0,\forall x\in\mathscr{X}$;

(3) $|P(x)-P(y)|\leqslant P(x-y),\forall x,y\in\mathscr{X}$;

(4) 如果 P 在 $x=0$ 处连续, 则 P 在 $\forall x_0\in\mathscr{X}$ 处连续.

证明. (1) 在齐次性中, 取 $x=0$, 则 $P(0)=|\alpha|P(0)$, 解得 $P(0)=0$;

(2) 在齐次性中, 取 $\alpha=-1$, 则 $P(-x)=P(x)$; 在次可数可加性中, 取 $y=-x$, 则 $P(x)+P(-x)=2P(x)\geqslant P(0)=0$, 从而 $P(x)\geqslant 0$;

(3) 在三角不等式中, 用 x 代替 $x+y$ 得

$$P(x)\leqslant P(x-y)+P(y)\implies P(x)-P(y)\leqslant P(x-y);$$

再用 y 代替 $x+y$ 得

$$P(y)\leqslant P(x)+P(y-x)=P(x)+P(x-y)\implies P(y)-P(x)\leqslant P(x-y).$$

综上即有 $|P(x)-P(y)|\leqslant P(x-y)$;

(4) 如果 P 在 $x=0$ 处连续, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $P(\delta)<\varepsilon$. 此时, 对上述 ε, 及对任意的 $x_0\in\mathscr{X}$, 都有

$$|P(x_0)-P(x_0+\delta)|\leqslant P(\delta)<\varepsilon,$$

此即说明 P 在 x_0 处连续. □

定理 2.1.2. 设 P 是 $\mathscr{X}$ 上的一个半范数, 令

$$M=\{x\in\mathscr{X}|P(x)\leqslant 1\},$$

则集合 M 具有如下性质:

(1) $0\in M$;

(2) M 是**凸的**, 也即对任意的 $t\in[0,1]$, 对任意的 $x,y\in M$, 有 $tx+(1-t)y\in M$;

(3) M 是**均衡的**, 也即对任意的 $x\in M$, 对任意的 $\alpha\in K$, 且 $|\alpha|\leqslant 1$, 有 $\alpha x\in M$;

(4) M 是**吸收的**, 也即对任意的 $x\in\mathscr{X}$, 存在 $\varepsilon_x>0$, 使得对任意的 $\alpha\in K$ 且 $0<|\alpha|\leqslant\varepsilon_x$, 有 $\alpha x\in M$;

(5) $P(x)=\inf\left\{\alpha>0\middle|\frac{x}{\alpha}\in M\right\}$.

证明. (1) 这是因为 $P(0)=0\leqslant 1$;

(2) 对任意的 $t\in[0,1]$, 对任意的 $x,y\in M$, 都有

$$P(tx+(1-t)y)\leqslant P(tx)+P((1-t)y)=tP(x)+(1-t)P(y)\leqslant t+1-t=1,$$

因此 $tx+(1-t)y\in M$;

(3) 对任意的 $x\in M$, 对任意的 $\alpha\in K$, 都有

$$P(\alpha x)=|\alpha|P(x)\leqslant 1,$$

因此 $\alpha x\in M$;

(4) 对任意的 $x\in M$, 取 $\varepsilon_x=\dfrac{1}{2P(x)}$, 则对任意的 $\alpha\in K$ 且 $0<|\alpha|\leqslant\varepsilon_x$, 都有

$$P(\alpha x)=|\alpha|P(x)\leqslant\varepsilon_xP(x)<1,$$

因此 $\alpha x \in M$;

(5) 首先, 对任意的 $\alpha \in \left\{\alpha > 0 \middle| \frac{x}{\alpha} \in M\right\}$, 有

$$P\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leqslant 1 \implies P(x) \leqslant \alpha,$$

对该式右端取下确界得

$$P(x) \leqslant \inf\left\{\alpha > 0 \middle| \frac{x}{\alpha} \in M\right\};$$

反之, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 都有

$$P\left(\frac{x}{P(x)+\varepsilon}\right) \leqslant 1 \implies \frac{x}{P(x)+\varepsilon} \in M,$$

从而

$$\inf\left\{\alpha > 0 \middle| \frac{x}{\alpha} \in M\right\} \leqslant P(x)+\varepsilon,$$

由 ε 的任意性知

$$\inf\left\{\alpha > 0 \middle| \frac{x}{\alpha} \in M\right\} \leqslant P(x),$$

因此

$$P(x) = \inf\left\{\alpha > 0 \middle| \frac{x}{\alpha} \in M\right\}.$$

□

在上面的定理的基础上, 我们给出 Minkowski 泛函的定义.

定义 2.1.2. 设 M 是 $\mathscr{X}$ 中的吸收凸子集, 称

$$P(x) = \inf\left\{\alpha > 0 \middle| \frac{x}{\alpha} \in M\right\}, \quad \forall x \in \mathscr{X}$$

为 $\mathscr{X}$ 上的 **Minkowski 泛函**.

定理 2.1.3. *设 P 是 $\mathscr{X}$ 上的 Minkowski 泛函, 则*

(1) (正齐次性) $P(\lambda x) = \lambda P(x), \forall \lambda > 0, \forall x \in \mathscr{X}$;

(2) (次可加性) $P(x+y) \leqslant P(x) + P(y), \forall x, y \in \mathscr{X}$;

(3) 如果 M 是均衡的, 则 P 是 $\mathscr{X}$ 上的一个半范数.

证明. (1) 令 $\frac{\alpha}{\lambda} = \beta$, 则 $\alpha = \lambda\beta$, 代入得

$$P(\lambda x) = \inf\left\{\alpha > 0 \middle| \frac{\lambda x}{\alpha} \in M\right\} = \inf\left\{\lambda\beta \middle| \frac{x}{\beta} \in M\right\} = \lambda \cdot \inf\left\{\beta \middle| \frac{x}{\beta} \in M\right\} = \lambda P(x);$$

(2) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\alpha_x, \alpha_y > 0$, 使得

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a_x} \in M \quad 且 \quad a_x < P(x) + \varepsilon, \\ \dfrac{y}{a_y} \in M \quad 且 \quad a_y < P(y) + \varepsilon. \end{cases}$$

注意到 $\dfrac{\alpha_x}{a_x + a_y} + \dfrac{\alpha_y}{a_x + a_y} = 1$, 因此

$$\frac{x+y}{\alpha_x + \alpha_y} = \frac{\alpha_x}{a_x + a_y} \cdot \frac{x}{a_x} + \frac{\alpha_y}{a_x + a_y} \cdot \frac{y}{a_y} \in M.$$

从而

$$P(x+y) \leqslant \alpha_x + \alpha_y \leqslant P(x) + P(y) + 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性知

$$P(x+y) \leqslant P(x) + P(y).$$

(3) 首先设 $K = \mathbb{R}$, 对任意的 $\lambda < 0$, 都有

$$\begin{aligned} P(\lambda x) &= \inf \left\{ \alpha > 0 \middle| \frac{\lambda x}{\alpha} \in M \right\} \\ &= \inf \left\{ \alpha > 0 \middle| \frac{-\lambda x}{\alpha} \in M \right\} \\ &= (-\lambda) P(x); \end{aligned}$$

其次设 $K = \mathbb{C}$, 则存在 θ, 使得 $x\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{R}^+$, 重复上面的过程即可. □

以上的研究对象都是半范数. 接下来给出范数的定义.

定义 2.1.3. 设 P 是 $\mathscr{X}$ 上的一个半范数, 如果 $P(x) = 0 \implies x = 0$, 则称 P 是 $\mathscr{X}$ 上的一个**范数**, 记为 $\|\cdot\|$. 称 $(X, \|\cdot\|)$ 为**赋范线性空间**.

可以看出, 赋范线性空间与范数具有如下的性质:

(1) (正定性) $\|x\| \geqslant 0$, 且 $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

(2) (齐次性) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

(3) (三角不等式) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

• **例 18.** ℓ^p 和 $L^p(\Omega)$ 都是赋范线性空间, 其中 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$;
在 $C[a,b]$ 上, 定义

$$[u]_\alpha = \sup_{x \neq y} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^\alpha},$$

则 $[u]_\alpha$ 是半范数;
另外, 定义

$$P(u) = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}},$$

则 $P(u)$ 是 $C^1(\Omega)$ 上的半范数, 但是是 $C_0^1(\Omega)$ 上的范数.

以下的定理在定理 (2.1.3) 的基础上, 做了进一步的推广.

定理 2.1.4. 设 M 是 $\mathscr{X}$ 中均衡、吸收的凸子集, 如果对任意的 $x \in \mathscr{X} \setminus \{0\}$, 都存在 $\alpha > 0$, 使得 $\dfrac{x}{\alpha} \notin M$, 则 P 是 $\mathscr{X}$ 上的一个范数.

证明. 只需证明 $P(x) = 0 \iff x = 0$. 假设存在 $x \neq 0$, 使得 $P(x) = 0$. 此时存在 $\alpha > 0$, 使得 $\dfrac{x}{\alpha} \notin M$. 则对任意的 $0 < \alpha_0 < \alpha$, 都有 $\dfrac{x}{\alpha_0} \notin M$, 否则由均衡可推得 $\dfrac{x}{\alpha} \in M$, 矛盾. 因此

$$P(x) = \inf \left\{ \alpha > 0 \middle| \frac{x}{\alpha} \in M \right\} \geqslant \frac{1}{\alpha},$$

此与 $P(x) = 0$ 矛盾. □

2.2 有限线性赋范空间与 Riesz 引理

定义 2.2.1. 设 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是 $\mathscr{X}$ 上的两个范数, $\{x_n\} \subset \mathscr{X}$, 如果 $\|x_n\|_1 \to 0 \implies \|x_n\|_2 \to 0$, 则称 $\|\cdot\|_1$ **强于** $\|\cdot\|_2$. 如果 $\|\cdot\|_2$ 还强于 $\|\cdot\|_1$, 则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是**等价的**.

另外, 对任意的 $x, y \in \mathscr{X}$, 定义

$$d(x,y) = \|x - y\|,$$

则 d 是 $\mathscr{X}$ 上的一个度量.

定义 2.2.2. 称完备的线性赋范空间为 **Banach 空间**.

定义 2.2.3. 设 $\{x_n\} \subset \mathscr{X}$, $\mathscr{X}$ 是赋范线性空间, 如果存在 $x \in X$, 使得 $\|x_n - x\| \to 0$, 称 $\{x_n\}$ **依范数收敛于** x.

定理 2.2.1. *设 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 $\mathscr{X}$ 上的两个范数, 则 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$ 的充要条件为: 存在正常数 $C > 0$, 使得 $\forall x \in \mathscr{X}$, 有 $\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$.*

证明. 根据强范数的定义, 充分性是显然的. 下面证明必要性.

假设结论为假, 则对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在 $x_n \in \mathscr{X}$, 使得 $\|x_n\|_2 > n\|x_n\|_1$. 不失一般性, 设 $\|x_n\|_2 = 1$, 否则令 $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|_2}$, 此时 $\|y_n\|_2 = 1$. 从而有 $\|x_n\|_1 < \dfrac{1}{n}$, 这与 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$ 矛盾. □

根据上述定理, 下面的推论是显然的.

推论 2.2.1. 设 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 均为线性空间 $\mathscr{X}$ 上的范数, 则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价的充要条件为: 存在 $r_1, r_2 > 0$, 使得 $\forall x \in \mathscr{X}$, 有

$$r_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant r_2\|x\|_1.$$

引理 2.2.1. 设 $e_1, e_2, \cdots, e_d$ 为实线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 中线性无关的元素, 则存在常数 $\mu > 0$, 使得 $\forall \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d \in \mathbb{R}$, 有

$$\mu \cdot \sum_{j=1}^{d} |\alpha_j| \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{d} \alpha_j e_j \right\|. \tag{2.1}$$

证明. 如果 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \neq \mathbf{0}$, 则 (2.1) 式等价于

$$\left\| \sum_{j=1}^{d} \frac{\alpha_j}{\sum_{i=1}^{d} |\alpha_i|} e_j \right\| \geqslant \mu. \tag{2.2}$$

令 $\beta_j = \dfrac{\alpha_j}{\sum_{i=1}^{d} |\alpha_i|}$, 则显然有 $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} |\beta_j| = 1$. 我们只需要证明 $\left\| \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \beta_j e_j \right\| \geqslant \mu$.

令 $f(\beta_1,\cdots,\beta_d)=\left\|\sum_{j=1}^{d}\beta_j e_j\right\|$, 由于

$$
\begin{aligned}
|f(\boldsymbol{\gamma})-f(\boldsymbol{\beta})| &= \left|\left\|\sum_{j=1}^{d}\gamma_j e_j\right\|-\left\|\sum_{j=1}^{d}\beta_j e_j\right\|\right| \\
&\leqslant \left\|\sum_{j=1}^{d}(\gamma_j-\beta_j)e_j\right\| \leqslant \sum_{j=1}^{d}\|e_j\|\cdot|\gamma_j-\beta_j|,
\end{aligned}
$$

则 f 为连续函数. 令 $S=\{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^d:\sum_{j=1}^{d}|\beta_j|=1\}$, 则 S 为 $\mathbb{R}^d$ 上的紧集. 故函数 f 在 S 上存在最小值 μ. 则存在 $\boldsymbol{\beta}_0\in S$, 使得 $f(\boldsymbol{\beta}_0)=\mu$. 且由于 $\boldsymbol{\beta}_0\in S$, 则 $\boldsymbol{\beta}_0\neq\mathbf{0}$. 因此 (2.2) 式成立. 引理得证. □

推论 2.2.2. 设 $\mathscr{X}$ 为有限维实线性赋范空间, $e_1,\cdots,e_d$ 为一组基, 则存在 $r_1,r_2>0$, 使得对任意的 $x\in\mathscr{X}$, 有 $\alpha_1,\cdots,\alpha_d\in\mathbb{R}$, 使得 $x=\sum_{j=1}^{d}\alpha_j e_j$, 且

$$
r_1\sum_{j=1}^{d}|\alpha_j|\leqslant\|x\|\leqslant r_2\sum_{j=1}^{d}|\alpha_j|.
$$

推论 2.2.3. 有限维线性空间中, 依范数收敛等价于依坐标收敛.

推论 2.2.4. 有限维线性赋范空间一定是闭的.

推论 2.2.5. 有限维线性赋范空间中的有界集一定是列紧集.

定理 2.2.2. 任何 n 维实线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 都是线性同构且拓扑同胚的.

证明. 构造映射

$$
\begin{aligned}
T:\quad \mathscr{X} &\to \mathbb{R}^n \\
\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j &\mapsto (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)
\end{aligned}
$$

其中 $e_1,\cdots,e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 则 T 为 $\mathscr{X}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性同构.

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 任取 $x,y\in\mathscr{X}$, 定义 $\|x\|_{\mathbb{R}^n}=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)^{1/2}$. 下面我们证明, T 为同胚映射, 只需要证明 T 与 T^{-1} 均连续.

(i) 证明 T 连续: $\forall x, y \in \mathscr{X}$, 设 $x=\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$, $y=\sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$, 则

$$\begin{aligned}
x-y &= \sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-\beta_j)e_j. \\
\Longrightarrow \qquad Tx-Ty &= (\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_n-\beta_n). \\
\Longrightarrow \quad \|Tx-Ty\|_{\mathbb{R}^n} &= \left(\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j-\beta_j|^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j-\beta_j| \leqslant \frac{1}{\mu}\|x-y\|.
\end{aligned}$$

因此 T 为连续映射;

(ii) 证明 T^{-1} 连续: 任取 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{R}^n$, 令 $x=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j$, $y=\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j$, 则 $T^{-1}\alpha=x$, $T^{-1}\beta=y$, 从而

$$\begin{aligned}
&\|T^{-1}\alpha-T^{-1}\beta\|=\|x-y\|=\left\|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-\beta_j)e_j\right\|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j-\beta_j|\,\|e_j\| \\
\leqslant&\left(\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j-\beta_j|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\|e_j\|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{j=1}^{n}\|e_j\|^2\right)^{1/2}\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|_{\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}$$

其中第二个不等号运用了 Cauchy-Schwarz 不等式. 因此 T^{-1} 为连续映射. 故 T 为同胚的. □

推论 2.2.6. 在有限维线性赋范空间中, 任何两个范数等价.

推论 2.2.7. 有限维线性赋范空间是完备可分的.

引理 2.2.2 (F. Riesz, 1981). 设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间, $\mathscr{Y}\neq\mathscr{X}$ 为闭的线性子空间. 则 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $x_\varepsilon\in\mathscr{X}\setminus\mathscr{Y}$, 使得 $\|x_\varepsilon\|=1$ 且 $\operatorname{dist}(x_\varepsilon,\mathscr{Y})>\varepsilon$, 其中

$$\operatorname{dist}(x_\varepsilon,\mathscr{Y}):=\inf_{y\in\mathscr{Y}}\|x_\varepsilon-y\|.$$

证明. $\forall x_0\in\mathscr{X}\setminus\mathscr{Y}$, 由于 $\mathscr{Y}$ 为闭集, 因此 $\operatorname{dist}(x_0,\mathscr{Y})>0$. 设 $\operatorname{dist}(x_0,\mathscr{Y})=d$, 则任取 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $y_0\in\mathscr{Y}$, 使得

$$d\leqslant\|x_0-y_0\|<\frac{d}{\varepsilon}.$$

令 $x_\varepsilon=\dfrac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|}$, 则 $\|x_\varepsilon\|=1$, 且对于任意的 $y\in\mathscr{Y}$,

$$\|x_\varepsilon-y\|=\left\|\frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|}-y\right\|=\frac{1}{\|x_0-y_0\|}\Big\|x_0-\big(y_0+y\|x_0-y_0\|\big)\Big\|>\varepsilon.$$

因此 $\operatorname{dist}(x_\varepsilon, \mathscr{Y}) > \varepsilon$. □

推论 2.2.8. 在无穷维线性赋范空间中, 单位闭球不是列紧集 (紧集). 更一般地, 无穷维线性赋范空间中的有界集非列紧集.

推论 2.2.9. 线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 中的单位球 (有界集) 是列紧的, 当且仅当 $\mathscr{X}$ 为有限维的.

定理 2.2.3. 设 $\mathscr{X}$ 为实线性赋范空间, 若 $\dim \mathscr{X} = \infty$, 则存在点列 $\{x_n\} \subset \mathscr{X}$, 满足对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $\|x_n\| = 1$, 且

$$\|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2} \quad (\forall n \neq m).$$

证明. 任取 $\mathscr{X}$ 中非零元素 x_0, 令 $x_1 = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$, 则 $\|x_1\| = 1$. 令

$$\mathscr{Y}_1 = \operatorname{span}\{x_1\} = \{\alpha \cdot x_1 | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

于是 $\mathscr{Y}_1$ 为 $\mathscr{X}$ 的闭子空间, 且 $\mathscr{Y}_1 \neq \mathscr{X}$. 由 Riesz 引理, 存在 $x_2 \in \mathscr{X} \setminus \mathscr{Y}_1$, $\|x_2\| = 1$ 且 $\operatorname{dist}(x_2, \mathscr{Y}_1) \geqslant \frac{1}{2}$, 则 $d(x_1, x_2) \geqslant \frac{1}{2}$. 再令

$$\mathscr{Y}_2 = \operatorname{span}\{x_1, x_2\} = \{\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

同理存在 $x_3 \in \mathscr{X} \setminus \mathscr{Y}_2$, $\|x_3\| = 1$ 且 $\operatorname{dist}(x_3, \mathscr{Y}_2) \geqslant \frac{1}{2}$, 则 $d(x_3, x_1) \geqslant \frac{1}{2}$, $d(x_3, x_2) \geqslant \frac{1}{2}$.

由于 $\dim \mathscr{X} = \infty$, 因此上述过程可以一直进行下去, 从而得到点列 $\{x_n\} \subset \mathscr{X}$, 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $\|x_n\| = 1$, 且

$$d(x_n, x_m) \geqslant \frac{1}{2} \quad (\forall n \neq m).$$ □

2.3　Hahn-Banach 定理

定义 2.3.1. 设 $\mathscr{X}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性赋范空间, 称 $f : \mathscr{X} \to \mathbb{K}$ 是**线性泛函**, 如果对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 对任意的 $x, y \in \mathscr{X}$, 有

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

称 $\mathscr{X}$ 上的泛函 $f : \mathscr{X} \to \mathbb{K}$ 是**有界的**, 如果存在 $M > 0$, 使得对任意的 $x \in \mathscr{X}$,

有

$$|f(x)| \leqslant M\|x\|.$$

记 $\mathscr{X}$ 上所有有界线性泛函的全体为 $\mathscr{X}^*$, 称为 $\mathscr{X}$ 的**对偶空间**.

- **例 19.** 设 $\mathscr{X} = \ell^p(1 < p < +\infty)$, 取定 $\boldsymbol{y} \in \ell^q$, 其中 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 定义

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j, \quad \forall \boldsymbol{x} = \{x_j\} \in \mathscr{X},$$

则

$$f(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{\infty}(\alpha x_j + \beta z_j)y_j = \alpha\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j + \beta\sum_{j=1}^{\infty} z_j y_j = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{z}),$$

同时

$$|f(\boldsymbol{x})| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|\boldsymbol{x}\|_{\ell^p} \cdot \|\boldsymbol{y}\|_{\ell^q},$$

因此 f 是 $\mathscr{X}$ 上的有界线性泛函, 从而 $f \in \mathscr{X}^*$.
类似地, 设 $\mathscr{X} = L(\Omega)$, 取定 $v \in L^q(\Omega)$, 定义

$$f(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)\mathrm{d}x, \quad \forall u \in L(\Omega),$$

则 $f \in \mathscr{X}^*$.

- **例 20.** 设 $\mathscr{X} = C([a,b];\mathbb{R})$, 取定 $t_0 \in [a,b]$, 定义

$$f(x) = x(t_0), \quad \forall x \in \mathscr{X},$$

则 f 一定是线性的, 且

$$|f(x)| = |x(t_0)| \leqslant \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = \|x\|,$$

从而 $f \in \mathscr{X}^*$. 但是, $f(x) = |x(t_0)| \notin \mathscr{X}^*$.

考虑对偶空间 $\mathscr{X}^*$, 对任意的 $f, g \in \mathscr{X}^*$, 定义运算

$$\begin{cases}(f+g)(x) = f(x) + g(x), \\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x),\end{cases} \qquad \forall x \in \mathscr{X},$$

则 $\mathscr{X}^*$ 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 更进一步, 对任意的 $f \in \mathscr{X}^*$, 定义

$$\|f\|_{\mathscr{X}^*} = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|,$$

则 $\|\cdot\|_{\mathscr{X}^*}$ 是 $\mathscr{X}^*$ 上的范数. 齐次性和三角不等式是容易得到的, 接下来验证正定性, 也即 $\|f\|_{\mathscr{X}^*} = 0 \implies f = 0$. 否则, 存在 $x_0 \in \mathscr{X}$, 使得 $f(x_0) \neq 0$, 根据 f 的性质知 $f(0) = 0$, 且 $x_0 \neq 0$, 从而

$$\frac{f(x_0)}{\|x_0\|} = f\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) \neq 0,$$

不妨假设 $f\left(\dfrac{x_0}{\|x_0\|}\right) > 0$, 否则可以用 $x_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 代替 x_0, 从而

$$\|f\|_{\mathscr{X}^*} \geqslant f\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) > 0,$$

此与 $\|f\|_{\mathscr{X}^*} = 0$ 矛盾. 上面的过程说明了, $\mathscr{X}^*$ 是赋范线性空间.

接下来, 对于 $\mathscr{X}^*$ 上定义的范数 $\|\cdot\|_{\mathscr{X}^*}$, 我们来说明

$$\|f\|_{\mathscr{X}^*} = \sup_{\|x\| = 1} |f(x)|.$$

一方面,

$$\|f\|_{\mathscr{X}^*} = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant \sup_{\|x\| = 1} |f(x)|;$$

另外一方面,

$$\|f\|_{\mathscr{X}^*} = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot \|x\| \right| \leqslant \sup_{\|x\| = 1} |f(x)| \cdot \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|x\| \leqslant \sup_{\|x\| = 1} |f(x)|,$$

因此 $\|f\|_{\mathscr{X}^*} = \sup\limits_{\|x\| = 1} |f(x)|$.

最后, 我们还可以说明 $\mathscr{X}^*$ 的完备性. 设 $\{f_n\} \subset \mathscr{X}^*$ 是 Cauchy 列, 也即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \geqslant 1$, 使得对任意的 $n, m \geqslant N$, 有

$$\|f_n - f_n\|_{\mathscr{X}^*} < \varepsilon,$$

从而对任意的 $x \in \mathscr{X}$, 有 $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\|x\|$. 此即说明对给定的 $x \in \mathscr{X}$, $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{K}$ 中的 Cauchy 列, 由 $\mathbb{K}$ 的完备性[1]知, 存在唯一的 $y_x \in \mathbb{K}$, 使得 $f_n(x) \to y_x$. 定义

$$f : \mathscr{X} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto y_x,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, 因此

$$|f(x)| = \overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x)| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} (\|f_n\| \cdot \|x\|) \leqslant \left(\sup_{n\geqslant 1} \|f_n\|\right) \cdot \|x\|,$$

从而 $f \in \mathscr{X}^*$. 接下来, 计算得

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{\mathscr{X}^*} &= \sup_{\|x\|=1} |f_n(x) - f(x)| \\
&= \sup_{\|x\|=1} \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\
&\leqslant \lim_{m\to\infty} \sup_{\|x\|=1} |f_n(x) - f_m(x)| \\
&= \lim_{m\to\infty} \|f_n(x) - f_m(x)\| \to 0,
\end{aligned}$$

此即说明当 $n \to \infty$ 时, $f_n \to f \in \mathscr{X}^*$.

定理 2.3.1 (Hahn-Banach 延拓定理, 1929). *设 $\mathscr{X}$ 为实线性空间, $p(x)$ 为 $\mathscr{X}$ 上正齐次且次可加的实函数, 即满足:*

(1) (正齐次性) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in \mathscr{X}$;

(2) (次可加性) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in \mathscr{X}$.

设 $\mathscr{Y}$ 为 $\mathscr{X}$ 的线性子空间, f 是 $\mathscr{Y}$ 上的线性泛函, 且满足 $\forall x \in \mathscr{Y}$, 都有 $f(x) \leqslant p(x)$. 则存在 $\mathscr{X}$ 上的实线性泛函 F, 使得

(1) $F(x) = f(x)$, $\quad \forall x \in \mathscr{Y}$;

(2) $F(x) \leqslant p(x)$, $\quad \forall x \in \mathscr{X}$.

引理 2.3.1. (**Zorn**) 设 $\mathscr{X}$ 为一个半序集, 如果 $\mathscr{X}$ 中任意全序集都有上界, 则 $\mathscr{X}$ 中存在一个极大元.

所谓**半序**, 是定义在 $\mathscr{X}$ 上的一个二元关系, 记为 "$\leqslant$", 如果满足

(1) (反身性) $x \leqslant x$, $\forall x \in \mathscr{X}$;

[1]此时 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 它们都是完备的.

(2) (反对称性) $x \leqslant y, y \leqslant x \Rightarrow x = y, \forall x, y \in \mathscr{X}$;

(3) (传递性) $x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z, \forall x, y, z \in \mathscr{X}$.

则称 "$\leqslant$" 为 $\mathscr{X}$ 上的一个**偏序**, 称 $(\mathscr{X}, \leqslant)$ 为一个**偏序集**.

如果 $\mathscr{X}$ 中任意两个元素 x, y 都有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$ 成立, 则称 $\mathscr{X}$ 为**全序集**.

下面回到原引理 (2.3.1) 的证明:

证明. 当 $\mathscr{Y} = \mathscr{X}$ 时, 定理显然成立. 下设 $\mathscr{Y} \neq \mathscr{X}$. $\forall x_0 \in \mathscr{X} \setminus \mathscr{Y}$, 显然有 $x_0 \neq 0$. 令

$$\mathscr{Y}_1 = \operatorname{span}\{x_0, \mathscr{Y}\} = \{\lambda x_0 + x | \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathscr{Y}\},$$

如果 F_1 为 $\mathscr{Y}_1$ 上的线性泛函, 满足

(1) $F_1(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathscr{Y}$;

(2) $F_1(x) \leqslant p(x), \quad \forall x \in \mathscr{Y}_1$.

则 $\forall x \in \mathscr{Y}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$f(x) + \lambda F_1(x_0) = F_1(x) + \lambda F_1(x_0) = F_1(x + \lambda x_0) \leqslant p(x + \lambda x_0).$$

若 $\lambda > 0$, 则

$$\begin{aligned} F_1(x_0) \leqslant \frac{1}{\lambda}\big(p(x+\lambda x_0) - f(x)\big) &= p\left(\frac{x}{\lambda} + x_0\right) - f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \\ &= p(x' + x_0) - f(x'), \quad \left(\forall x' = \frac{x}{\lambda} \in \mathscr{Y}\right); \end{aligned}$$

若 $\lambda < 0$, 则

$$\begin{aligned} F_1(x_0) \geqslant \frac{1}{\lambda}\big(p(x+\lambda x_0) - f(x)\big) &= -\frac{1}{-\lambda}\big(p(x+\lambda x_0) - f(x)\big) \\ &= -\left[p\left(-\frac{x}{\lambda} - x_0\right) - f\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\right] \\ &= -\left[p(x'' - x_0) - f(x'')\right], \quad \left(\forall x'' = -\frac{x}{\lambda} \in \mathscr{Y}\right). \end{aligned}$$

由于 $\forall x', x'' \in \mathscr{Y}$,

$$\begin{aligned} & p(x' + x_0) - f(x') + p(x'' - x_0) - f(x'') \\ =& \big(p(x' + x_0) + p(x'' - x_0)\big) - \big(f(x') + f(x'')\big) \\ \geqslant& p(x' + x'') - f(x' + x'') \geqslant 0. \end{aligned}$$

从而有

$$-[p(x''-x_0)-f(x'')]\leqslant p(x'+x_0)-f(x'),\quad (\forall x',x''\in\mathscr{Y}).$$

上式中分别对 x',x'' 取下极限和上极限, 即可得到

$$\sup_{x''\in\mathscr{Y}}\big(f(x'')-p(x''-x_0)\big)\leqslant\inf_{x'\in\mathscr{X}}\big(p(x'+x_0)-f(x')\big).$$

因此对于任意的 $x_0\in\mathscr{X}\setminus\mathscr{Y}$, 只要取

$$F_1(x_0)\in\left[\sup_{x''\in\mathscr{Y}}\big(f(x'')-p(x''-x_0)\big),\ \inf_{x'\in\mathscr{X}}\big(p(x'+x_0)-f(x')\big)\right]$$

即可满足条件.

设 F 为 $\mathscr{X}$ 上的实线性泛函, $\mathscr{D}(F)$ 为其定义域. 若 $\mathscr{Y}\subset\mathscr{D}(F)$, 且满足

(1) $F(x)=f(x),\quad\forall x\in\mathscr{Y}$;

(2) $F(x)\leqslant p(x),\quad\forall x\in\mathscr{D}(F)$,

称 F 是 f 在 $\mathscr{D}(F)$ 上**由 $\boldsymbol{p(x)}$ 控制的线性延拓**. 记

$$\mathscr{F}=\left\{F\middle|F\text{ 为 }f\text{ 在 }\mathscr{D}(F)\text{ 上由 }p(x)\text{ 控制的线性延拓}\right\}.$$

设 $F_1,F_2\in\mathscr{F}$, 称

$$F_1\leqslant F_2\quad\Longleftrightarrow\quad\mathscr{D}(F_1)\subset\mathscr{D}(F_2)\text{ 且 }F_2(x)=F_1(x),\forall x\in\mathscr{D}(F_1),$$

则 $(\mathscr{F},\leqslant)$ 为一个偏序集.

设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 $\mathscr{F}$ 中任意的全序集, 定义 $\mathscr{D}(F^*)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}\mathscr{D}(F_\alpha)$,

$$F^*(x)=F_\alpha(x),\quad\forall x\in\mathscr{D}(F_\alpha),$$

则 F^* 为 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的一个上界. 由 Zorn 引理, $\mathscr{F}$ 中有极大元 F, 则显然 F 也为 f 的线性延拓. 若 $\mathscr{D}(F)\neq\mathscr{X}$, 根据之前的证明, F 重复之前的操作, 可以得到 F' 满足

(1) $F'(x)=F(x),\quad\forall x\in D(F)$;

(2) $F'(x)\leqslant p(x),\quad\forall x\in\mathscr{D}(F')\supset\mathscr{D}(F)$.

从而 $F'\in\mathscr{F}$ 且 $F\leqslant F'$, 这与 F 的极大性矛盾. 至此, 引理 (2.3.1) 得到了证明. □

定理 2.3.2 (Bohnenblust-Sobczyk, 1938). 设 $\mathscr{X}$ 为复线性空间, $p(x)$ 为 $\mathscr{X}$ 上的半范数, $\mathscr{Y}$ 为 $\mathscr{X}$ 的线性子空间, f 是 $\mathscr{Y}$ 上的线性泛函, 满足 $\forall x \in \mathscr{Y}$, $|f(x)| \leqslant p(x)$. 则存在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 F, 使得

(1) $F(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathscr{Y}$;

(2) $|F(x)| \leqslant p(x), \quad \forall x \in \mathscr{X}$.

证明. 设 $\mathrm{Re} f(x) = f_1(x)$, $\mathrm{Im} f(x) = f_2(x)$, 则

$$f(x) = f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x), \quad \forall x \in \mathscr{Y}.$$

则 $\forall x, y \in \mathscr{Y}$, 有

$$\begin{aligned} f_1(x+y) + \mathrm{i} f_2(x+y) &= f(x+y) \\ &= f(x) + f(y) = f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x) + f_1(y) + \mathrm{i} f_2(y). \end{aligned}$$

根据复数相等的充要条件, 比较等式的两端, 即可得到

$$f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y), \quad f_2(x+y) = f_2(x) + f_2(y).$$

类似可得, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathscr{Y}$, 有

$$f_1(\alpha x) = \alpha f_1(x), \quad f_2(\alpha x) = \alpha f_2(x).$$

因此, 如果将 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 视作实的线性空间, 则 f_1, f_2 为 $\mathscr{Y}$ 上的实线性泛函.

又对于 $x \in \mathscr{Y}$, 有

$$f_1(\mathrm{i}x) + \mathrm{i} f_2(\mathrm{i}x) = f(\mathrm{i}x) = \mathrm{i} f(x) = -f_2(x) + \mathrm{i} f_1(x),$$

则 $f_2(x) = -f_1(\mathrm{i}x)$, 从而 $f(x) = f_1(x) - \mathrm{i} f_1(\mathrm{i}x)$.

由于

$$f_1(x) = \mathrm{Re} f(x) \leqslant |f(x)| \leqslant p(x), \quad \forall x \in \mathscr{Y},$$

则由定理 (2.3.1) 知, 存在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 $F_1(x)$, 满足

(1) $F_1(x) = f_1(x), \quad \forall x \in \mathscr{Y}$;

(2) $F_1(x) \leqslant p(x), \quad \forall x \in \mathscr{X}$.

令 $F(x)=F_1(x)-\mathrm{i}F_1(\mathrm{i}x)$, 则 $\forall x\in\mathscr{Y}$,

$$F(x)=F_1(x)-\mathrm{i}F_1(\mathrm{i}x)=f_1(x)-\mathrm{i}f_1(\mathrm{i}x)=f(x).$$

若 $F(x)=0$, 则 $|F(x)|=0\leqslant p(x)$; 若 $F(x)\neq 0$, 则 $F(x)$ 可写作 $F(x)=|F(x)|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_x}$, 其中 $\theta_x=\mathrm{Arg}F(x)$. 此时有

$$\begin{aligned}|F(x)|&=F(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_x}=F\left(x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_x}\right)=\mathrm{Re}F\left(x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_x}\right)\\&=F_1\left(x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_x}\right)\leqslant p\left(x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_x}\right)=\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_x}\right|\cdot p(x)=p(x).\end{aligned}$$

从而 $|F(x)|\leqslant p(x)$ 恒成立. 至此定理 (2.3.2) 得到了证明. □

以下的定理是上面的定理的推论, 更加常用.

定理 2.3.3 (Hahn-Banach 定理, 1927). *设 $\mathscr{X}$ 是线性赋范空间, $\mathscr{Y}$ 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间. f 是 $\mathscr{Y}$ 上的有界线性泛函 (也即 $f\in\mathscr{Y}^*$), 则存在 $\mathscr{X}$ 上的有界线性泛函 F, 使得*

(1) $F(x)=f(x),\forall x\in\mathscr{Y}$;

(2) $\|F\|_{\mathscr{X}^*}=\|f\|_{\mathscr{Y}^*}$.

证明. 我们知道, 对任意的 $x\in\mathscr{Y}$, $|f(x)|\leqslant\|f\|_{\mathscr{Y}^*}\|x\|$. 令 $P(x)=\|f\|_{\mathscr{Y}^*}\|x\|$, 则 P 是 $\mathscr{X}$ 上的一个半范数. 由定理 (2.3.2) 知, 存在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 F, 使得

(1) $F(x)=f(x),\forall x\in\mathscr{Y}$;

(2) $|F(x)|\leqslant P(x)=\|f\|_{\mathscr{Y}^*}\|x\|,\forall x\in\mathscr{X}$.

从而 $F\in\mathscr{X}^*$, 且根据以上 (2) 得

$$\frac{|F(x)|}{\|x\|}\leqslant\|f\|_{\mathscr{Y}^*}\implies\|F\|_{\mathscr{X}^*}=\sup_{\|x\|=1}\frac{|F(x)|}{\|x\|}\leqslant\|f\|_{\mathscr{Y}^*},$$

接下来说明 $\|F\|_{\mathscr{X}^*}\geqslant\|f\|_{\mathscr{Y}^*}$. 此时

$$\|F\|_{\mathscr{X}^*}=\sup_{x\in\mathscr{X},\|x\|\leqslant 1}|F(x)|\geqslant\sup_{x\in\mathscr{Y},\|x\|\leqslant 1}|F(x)|=\sup_{x\in\mathscr{Y},\|x\|\leqslant 1}|f(x)|=\|f\|_{\mathscr{Y}^*}),$$

从而 $\|F\|_{\mathscr{X}^*}=\|f\|_{\mathscr{Y}^*}$. □

利用定理 (2.3.3) 可以得到如下重要推论.

推论 2.3.1. 设 $\mathscr{X}$ 是线性赋范空间, $0 \neq x_0 \in \mathscr{X}$, 则存在 $f \in \mathscr{X}^*$, 使得

(1) $\|f\| = 1$;

(2) $f(x_0) = \|x_0\|$.

证明. 令 $\mathscr{Y} = \operatorname{span}\{x_0\} = \{\alpha x_0 | \alpha \in \mathbb{K}\}$, $f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$, 则 $f(x_0) = \|x_0\|$, 且

$$|f(\alpha x_0)| = |\alpha|\|x_0\| = \|\alpha x_0\| \implies \|f\|_{\mathscr{Y}^*} = 1,$$

由定理 (2.3.3) 知结论成立. □

推论 2.3.2. 非零的线性赋范空间上必有非零的有界线性泛函.

证明. 设 $\mathscr{X}$ 是非零的线性赋范空间, $0 \neq x_0 \in \mathscr{X}$, 则由推论 (2.3.1) 知存在有界线性泛函 f, 且根据 $\|f\| = 1$ 知 f 非零. □

推论 2.3.3. 对任意的 $x, y \in \mathscr{X}$ 且 $x \neq y$, 存在 $f \in \mathscr{X}^*$, 使得 $f(x) \neq f(y)$.

证明. 令 $\mathscr{Y} = \operatorname{span}\{x, y\} = \{\lambda x + \mu y | \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$, 定义 $f(\lambda x + \mu y) = \lambda$, 则 $f(x) \neq f(y)$, 由定理 (2.3.3) 知可以将 f 延拓到 $\mathscr{X}^*$ 上. □

推论 2.3.4. $x = 0 \iff$ 对任意的 $f \in \mathscr{X}^*$, 有 $f(x) = 0$.

证明. 一方面, 若 $x = 0$, 则 $f(x) = f(0) = 0$.

另外一方面, 若对任意的 $f \in \mathscr{X}^*$, 有 $f(x) = 0$. 假设 $x \neq 0$, 则由推论 (2.3.1) 知, 存在 $f \in \mathscr{X}^*$, 使得 $f(x) = \|x\| \neq 0$, 矛盾. □

以下也是一个重要的推论.

推论 2.3.5. 设 $\mathscr{X}$ 是线性赋范空间, $\mathscr{Y}$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭真子空间, $x_0 \in \mathscr{X} \setminus \mathscr{Y}$, 则存在 $f \in \mathscr{X}^*$, 使得

(1) $f(x) = 0, \forall x \in \mathscr{Y}$;

(2) $f(x_0) = d = \operatorname{dist}(x_0, \mathscr{Y})$;

(3) $\|f\| = 1$.

证明. 令 $\mathscr{Y}_1 = \mathrm{span}\{x_0, \mathscr{Y}\} = \{\alpha x_0 + x | \alpha \in \mathbb{K}, x \in \mathscr{Y}\}$, 定义 $f(\alpha x_0 + x) = \alpha d$. 首先说明这样的定义是有意义的. 对任意的 $y \in \mathscr{Y}_1$, 设

$$y = \alpha_1 x_0 + x_1 = \alpha_2 x_0 + x_2 \implies (\alpha_1 - \alpha_2) x_0 = x_2 - x_1 = 0,$$

此即说明 $\alpha_1 = \alpha_2, x_1 = x_2$, 从而 y 的表示是唯一的, f 是有意义的. 此时

$$f(x_0) = d, \quad f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathscr{Y},$$

接下来, 若 $\alpha = 0$, 则 $f(\alpha x_0 + x) = 0$; 若 $a \neq 0$, 则

$$|f(ax_0 + x)| = |\alpha| d \leqslant |\alpha| \cdot \left\| x_0 + \frac{x}{\alpha} \right\| = \|\alpha x_0 + x\|,$$

从而 $\|f\| \leqslant 1$; 另一方面, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x \in \mathscr{Y}$, 使得

$$d \leqslant \|x_0 - x\| < d + \varepsilon = f(x_0 - x) + \varepsilon,$$

从而

$$1 < f\left(\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right) + \frac{\varepsilon}{\|x - x_0\|} \leqslant f\left(\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right) + \frac{\varepsilon}{d},$$

由 ε 的任意性知 $f\left(\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right) \geqslant 1$, 对该式取上确界得 $\|f\| \geqslant 1$, 从而 $\|f\| = 1$. 再应用定理 (2.3.3) 将 f 从 $\mathscr{Y}_1$ 上延拓到 $\mathscr{X}$ 上即可. □

推论 2.3.6. 设 $M \subset \mathscr{X}$, $0 \neq x_0 \in \mathscr{X}$, 则 $x_0 \in \overline{\mathrm{span} M} \iff$ 对任意的满足条件 $f(x) = 0, \forall x \in M$ 的 $f \in \mathscr{X}^*$, 有 $f(x_0) = 0$.

证明. 一方面, 设 $x_0 \in \overline{\mathrm{span} M}$, 存在 $\{y_n\} \subset \overline{\mathrm{span} M}$, 使得 $y_n \to x_0$. 由假设知 $f(y_n) = 0$, 由 f 的连续性 [2] 知 $f(x_0) = 0$.

另外一方面, 设对任意的满足条件 $f(x) = 0, \forall x \in M$ 的 $f \in \mathscr{X}^*$, 有 $f(x_0) = 0$. 假设 $x_0 \notin \overline{\mathrm{span} M}$, 由推论 (2.3.5) 知, 存在 $f \in \mathscr{X}^*$, 使得

(1) $f(x) = 0, \forall x \in \overline{\mathrm{span} M}$;

(2) $f(x_0) = 1$,

根据 $M \subset \overline{\mathrm{span} M}$ 知, 对任意的 $x \in M$, 都有 $f(x) = 0$, 但是 $f(x_0) = 1 \neq 0$, 矛盾. □

注意到 $\overline{M} \subset \overline{\mathrm{span} M}$, 从而有以下推论.

[2] 此时 $f(x - y) \leqslant \|f\| \cdot \|x - y\|$, 从而 f 是连续的.

推论 2.3.7. 设 M 是 $\mathscr{X}$ 的一个线性子空间, $0 \neq x_0 \in \mathscr{X}$, 则 $x_0 \in \overline{M} \iff$ 对任意的满足条件 $f(x) = 0, \forall x \in M$ 的 $f \in \mathscr{X}^*$, 有 $f(x_0) = 0$.

证明. 一方面, 设 $x_0 \in \overline{M} \subset \overline{\mathrm{span} M}$, 根据推论 (2.3.6) 知 $f(x_0) = 0$.

另外一方面, 对任意的满足条件 $f(x) = 0, \forall x \in M$ 的 $f \in \mathscr{X}^*$, 有 $f(x_0) = 0$. 假设 $x_0 \notin \overline{M}$, 由推论 (2.3.5) 知, 存在 $f \in \mathscr{X}^*$, 使得

(1) $f(x) = 0, \forall x \in \overline{M}$;

(2) $f(x_0) = 1$,

此与假设矛盾. □

推论 2.3.8. 设 $\mathscr{X}$ 是线性赋范空间, $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $\mathscr{X}$ 中 n 个线性无关的元素, 则存在 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathscr{X}^*$, 使得

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

证明. 对 $1 \leqslant i \leqslant n$, 令 $\mathscr{Y}_i = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_{i-1}, e_{i+1}, \cdots, e_n\}$, 则 $e_i \in \mathscr{X} \setminus \mathscr{Y}_i$, 由推论 (2.3.5) 知, 存在 $f_i \in \mathscr{X}^*$, 使得

(1) $f_i(x) = 0, \forall x \in \mathscr{Y}_i$;

(2) $f_i(e_i) = 1$.

由条件 (1) 知对任意的 $e_j (j \neq i)$, 有 $f_i(e_j) = 0$. 从而 $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. □

反过来, 我们有如下的结论.

推论 2.3.9. 设 $\mathscr{X}$ 是线性赋范空间, $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是 $\mathscr{X}^*$ 中 n 个线性无关的元素, 则存在 $e_1, e_2, \cdots, e_n \in \mathscr{X}$, 使得

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

证明. (方法一) 令 $\varphi : \mathscr{X} \to \Lambda^n, x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$. 首先, $\mathrm{Rang}\varphi$ 是线性空间. 这是因为, 对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 对任意的 $(f_1(x), \cdots, f_n(x)), (f_1(y), \cdots, f_n(y)) \in \mathrm{Rang}\varphi$,

都有

$$\begin{aligned}&\alpha(f_1(x),\cdots,f_n(x))+\beta(f_1(y),\cdots,f_n(y))\\=&(\alpha f_1(x)+\beta f_1(y),\cdots,\alpha f_n(x)+\beta f_n(y))\\=&(f_1(\alpha x+\beta y),\cdots,f_n(\alpha x+\beta y))\in \mathrm{Rang}\varphi.\end{aligned}$$

如果 $\mathrm{Rang}\varphi=\Lambda^n$ 的话, 那么 φ 就是满射, 从而可以找到

$$\begin{aligned}(1,0,\cdots,0)&=(\delta_{11},\delta_{12},\cdots,\delta_{1n}),\\(0,1,\cdots,0)&=(\delta_{21},\delta_{22},\cdots,\delta_{2n}),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\(0,0,\cdots,1)&=(\delta_{n1},\delta_{n2},\cdots,\delta_{nn})\end{aligned}$$

在 $\mathscr{X}$ 中的原像 $e_1,e_2,\cdots,e_n$. 从而, 接下来只要验证 $\mathrm{Rang}\varphi=\Lambda^n$.

假设 $\mathrm{Rang}\varphi\neq\Lambda^n$, 则由推论 (2.3.5) 知, 对任意的 $x_0\in\Lambda^n\setminus\mathrm{Rang}\varphi$, 存在 $f\in(\Lambda^n)^*$, 使得 $f(x)=0,\forall x\in\mathrm{Rang}\varphi$, 且 $f(x_0)=1$. 由 Riesz 表示定理[3]知, 存在 $y_0\in\Lambda^n$, 使得 $f(x)=(x,y_0),\forall x\in\Lambda^n$. 从而

$$\sum_{j=1}^n\overline{y_{0j}}f_j(x)=0,\quad\forall x\in\mathscr{X}\implies\sum_{j=1}^n\overline{y_{0j}}f_j=0,$$

又根据

$$\|f\|=\left(\sum_{j=1}^n|y_{0j}|^2\right)^{\frac12}\neq0$$

知 $\{y_{0j}\}$ 不全为零, 从而 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性相关, 矛盾. □

上述关于推论 (2.3.9) 的证明中, 我们用到了 Riesz 表示定理. 下面的证明将给出另一种证明方法.

首先来看一个引理:

引理 2.3.2. 设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间, $f_1,f_2,\cdots,f_n\in\mathscr{X}^*$. 如果

$$\bigcap_{i=1}^n\mathrm{Ker}f_i\subset\mathrm{Ker}f_0,$$

[3]在这里提前用了之后的结论. 所谓的 Riesz 表示定理是: 设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间 (完备的内积空间), 则对任意的 $f\in H^*$, 存在唯一的 $z_f\in H$, 使得 $f(x)=(x,z_f),\forall x\in H$, 且 $\|f\|=\|z_f\|$.

则存在 n 个常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 使得 $f_0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j$. 其中, $\mathrm{Ker} f = \{x \in \mathscr{X} | f(x) = 0\}$.

证明. 考虑使用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, 已知 $\mathrm{Ker} f_1 \subset \mathrm{Ker} f_0$. 若 $f_1 \equiv 0$, 则 $\mathrm{Ker} f_1 = \mathscr{X} \subset \mathrm{Ker} f_0$, 从而 $f_0 \equiv 0$. 故显然存在 λ_1 使得 $f_0 = \lambda_1 f_1$. 若 $f_1 \not\equiv 0$, 则存在 $x_1 \in \mathscr{X}$ 且 $x_1 \neq 0$, 使得 $f_1(x_1) = 1$. 从而, $\forall x \in \mathscr{X}$, 有

$$f_1(x) = f_1(x_1) f_1(x) = f_1\big(x_1 \cdot f_1(x)\big).$$

从而 $x - x_1 \cdot f_1(x) \in \mathrm{Ker} f_1$. 由假设知, $f_0\big(x - x_1 \cdot f_1(x)\big) = 0$, 从而

$$f_0(x) = f_0(x_1) \cdot f_1(x), \quad \forall x \in \mathscr{X}.$$

即 $f_0 = f_0(x_1) f_1$, 则 $n=1$ 时命题成立.

假设原结论对所有的 $n \leqslant k$ 均成立, 则当 $n = k+1$ 时, 记 $\mathscr{X}_0 = \mathrm{Ker} f_{k+1}$, 并定义 f_i 在 $\mathscr{X}_0$ 上的限制为 $f_i|_{\mathscr{X}_0} : \mathscr{X}_0 \to \Lambda$. 则

$$\mathrm{Ker} f_i|_{\mathscr{X}_0} = \{x \in \mathscr{X}_0 | f_i = 0\} = \mathscr{X}_0 \cap \mathrm{Ker} f_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

由假设条件,

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} f_i|_{\mathscr{X}_0} = \bigcap_{i=1}^{k} \big(\mathrm{Ker} f_i \cap \mathscr{X}_0\big) = \bigcap_{i=1}^{k+1} \mathrm{Ker} f_i \subset \mathrm{Ker} f_0 \cap \mathscr{X}_0.$$

又由归纳假设, 存在 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, 使得 $f_0|_{\mathscr{X}_0} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j|_{\mathscr{X}_0}$, 从而

$$\left(f_0 - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j\right)(x) = 0, \quad \forall x \in \mathscr{X}_0.$$

因此 $\mathrm{Ker} f_{k+1} = \mathscr{X}_0 \subseteq \mathrm{Ker}\left(f_0 - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j\right)$. 再由归纳假设, 存在 λ_{k+1} 使得

$$f_0 - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j = \lambda_{k+1} f_{k+1},$$

从而 $f_0 = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j f_j$, 即当 $n = k+1$ 时, 命题成立. 引理得证! □

有了上述引理, 现在我们回到推论 (2.3.9) 的证明.

证明. 若对于任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$, 存在 x_i 满足

$$x_i \in \bigcap_{\substack{j \neq i \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \mathrm{Ker} f_j \quad \text{且} \quad f_i(x_i) \neq 0,$$

令 $e_i = \dfrac{x_i}{f_i(x_i)}$, 则原命题显然成立. 若上述假设不成立, 则存在 $1 \leqslant i_0 \leqslant n$, 使得

$$\forall x \in \bigcap_{\substack{j \neq i_0 \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \mathrm{Ker} f_j,$$

都有 $f_{i_0}(x) = 0$. 由引理 (2.3.2), 存在 $n-1$ 个常数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{i_0-1}, \lambda_{i_0+1}, \cdots, \lambda_n$, 使得

$$f_{i_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} \lambda_j f_j.$$

此时有 $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{i_0-1} f_{i_0-1} - f_{i_0} + \lambda_{i_0+1} f_{i_0+1} + \cdots + \lambda_n f_n = 0$, 这与 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性无关矛盾! 命题得证. □

定理 2.3.4. 设 $\mathscr{X}$ 为线性空间, 如果 f 为 $\mathscr{X}$ 上的非零线性泛函, 即存在 $x_0 \in \mathscr{X}$ 使得 $f(x_0) \neq 0$, 则

$$\mathscr{X} = \mathrm{span}\{x_0\} \oplus \mathrm{Ker} f.$$

证明. $\forall x \in \mathscr{X}$, 由于 $f(x) = \dfrac{f(x_0) f(x)}{f(x_0)}$, 因此 $f\left(x - \dfrac{f(x)}{f(x_0)} x_0\right) = 0$. 从而

$$x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 \in \mathrm{Ker} f, \quad \forall x \in \mathscr{X}.$$

因此 $\mathscr{X} = \mathrm{span}\{x_0\} + \mathrm{Ker} f$.

$\forall x \in \mathrm{span}\{x_0\} \cap \mathrm{Ker} f$, 显然有 $x = \lambda x_0 \in \mathrm{Ker} f$, 从而 $f(\lambda x_0) = \lambda f(x_0) = 0$, 则 $\lambda = 0$, 进而 $x = 0$. 因此上式中的和为直和, 即

$$\mathscr{X} = \mathrm{span}\{x_0\} \oplus \mathrm{Ker} f.$$

□

推论 2.3.10. 设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间, $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为 $\mathscr{X}^*$ 中线性无关的元素, $e_1, e_2, \cdots, e_n \in \mathscr{X}$, 且满足 $f_i(e_j) = \delta_{ij}$, $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n$. 则有

$$\mathscr{X} = \operatorname{span}\{e_j\}_{j=1}^n \bigoplus \left(\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \right).$$

证明. $\forall x \in \mathscr{X}$, 令 $y = x - \sum\limits_{j=1}^n f_j(x) e_j$, 则对于 $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$f_i(y) = f_i(x) - \sum_{j=1}^n f_j(x) f_i(e_j) = f_i(x) - f_i(x) = 0.$$

从而对 $1 \leqslant i \leqslant n$, $y \in \operatorname{Ker} f_i$, 则 $y \in \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i$. 从而

$$\mathscr{X} = \operatorname{span}\{e_j\}_{j=1}^n + \left(\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i \right).$$

下面证明上式中为直和. $\forall x \in \operatorname{span}\{e_j\}_{j=1}^n \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i\right)$, 则 $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \in \operatorname{Ker} f_i$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$. 因此

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_i(e_j) = \lambda_i = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

故 $x = 0$. 从而

$$\mathscr{X} = \operatorname{span}\{e_j\}_{j=1}^n \bigoplus \left(\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \right).$$

□

定理 2.3.5. 设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间, $\mathscr{Y}$ 为 $\mathscr{X}$ 的 n 维子空间. 则存在 $\mathscr{X}$ 的闭子空间 $\mathscr{Z}$, 使得 $\mathscr{X} = \mathscr{Y} \oplus \mathscr{Z}$.

上述定理的证明是显然的. 设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 $\mathscr{Y}$ 的一组基, 由推论 (2.3.8) 知, 存在 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathscr{X}^*$, 使得 $f_i(e_j) = \delta_{ij}, (1 \leqslant i, j \leqslant n)$. 于是令 $\mathscr{Z} = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i$, 则 $\mathscr{Z}$ 为有限维且闭的, 且由推论 (2.3.10) 知,

$$\mathscr{X} = \operatorname{span}\{e_j\}_{j=1}^n \bigoplus \left(\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \right) = \mathscr{Y} \oplus \mathscr{Z}.$$

定义 2.3.2. 设 $\mathscr{X}$ 为实线性空间, $\mathscr{Y}$ 为 $\mathscr{X}$ 的线性子空间. 称 $\mathscr{Y}$ 为**极大的**, 若对任何以 $\mathscr{Y}$ 为真子集的线性空间 $\mathscr{Y}_1$, 都有 $\mathscr{Y}_1 = \mathscr{X}$.

定理 2.3.6. *设 $\mathscr{X}$ 为实线性空间, $\mathscr{Y}$ 为 $\mathscr{X}$ 的线性子空间, 则 $\mathscr{Y}$ 为极大线性子空间的充要条件为, $\mathscr{Y}$ 为 $\mathscr{X}$ 的线性真子空间, 且 $\forall x_0 \in \mathscr{X} \setminus \mathscr{Y}$, 有 $\mathscr{X} = \operatorname{span}\{x_0\} \oplus \mathscr{Y}$.*

证明. 必要性是显然的. 为了证明充分性, 设 $\mathscr{Y}_1$ 是以 $\mathscr{Y}$ 为真子集的线性子空间, 则存在 $x_0 \in \mathscr{Y}_1 \setminus \mathscr{Y}$. 于是有 $\lambda x_0 \in \mathscr{Y}_1$ 及 $\mathscr{Y} \subset \mathscr{Y}_1$, 从而

$$\mathscr{X} = \operatorname{span}\{x_0\} \oplus \mathscr{Y} = \mathscr{Y}_1,$$

即得 $\mathscr{X} = \mathscr{Y}_1$. 于是 $\mathscr{Y}$ 为极大线性子空间. □

定义 2.3.3. 设 $\mathscr{Y}$ 为实线性空间 $\mathscr{X}$ 中的极大线性子空间, $x_0 \in \mathscr{X} \setminus \mathscr{Y}$. 称对 x_0 的平移 $\mathscr{L} = x_0 + \mathscr{Y}$ 为**极大线性流形**, 或**超平面**.

定理 2.3.7. *设 $\mathscr{X}$ 为实线性 (赋范) 空间, 则 $\mathscr{L}$ 为 $\mathscr{X}$ 的一个 (闭) 超平面, 当且仅当存在 $\mathscr{X}$ 上的非零 (有界) 线性泛函 f 及 $0 \neq r \in \mathbb{R}$, 使得*

$$\mathscr{L} = H_f^r = \{x \in \mathscr{X} | f(x) = r\}.$$

证明. 设 $\mathscr{L}$ 是一个超平面, 则存在极大线性子空间 $\mathscr{Y}$ 及 $x_0 \in \mathscr{X} \setminus \mathscr{Y}$, 使得 $\mathscr{L} = x_0 + \mathscr{Y}$. 由 $\mathscr{Y}$ 的极大性知,

$$\mathscr{X} = \operatorname{span}\{x_0\} \oplus Y = \{\lambda x_0 + x | \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathscr{Y}\}.$$

定义 $f : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$, $\lambda x_0 + x \mapsto \lambda$, 则 f 是有意义的且是线性泛函. 对任意的 $x \in \mathscr{L} = x_0 + \mathscr{Y}$, 有 $f(x) = 1$, 从而 $L \subset H_f^1$. 再任取 $x \in H_f^1$, 有 $f(x) = 1$, 又由 $f(x_0) = 1$ 知 $f(x - x_0) = 0$, 从而 $x - x_0 \in \operatorname{Ker} f$, 也即对任意的 $x \in \mathscr{Y}$, 都有 $f(x) = 0$, 这便说明了 $\mathscr{Y} \subset \operatorname{Ker} f$. 由 $\mathscr{Y}$ 的极大性得

$$\mathscr{Y} \oplus \operatorname{span}\{x_0\} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{x_0\} = \mathscr{X},$$

从而 $\mathscr{Y} = \operatorname{Ker} f$.

反之, 如果 f 是非零线性泛函, $r \neq 0$, $\mathscr{L} = H_f^r$, 下证明 $\mathscr{L}$ 是超平面. 给定 $x_0 \in \mathscr{L}$, 有 $f(x_0) = r$, 又对任意的 $x \in H_f^r$, 有 $f(x) = r = f(x_0)$, 因此 $f(x - x_0) = 0$, $x - x_0 \in \mathrm{Ker} f$, 这便说明了

$$H_f^r \subseteq x_0 + \mathrm{Ker} f;$$

对上述 x_0, 取 $x \in \mathrm{Ker} f$, 则 $f(x_0 + x) = f(x_0) = r$, 从而

$$x_0 + \mathrm{Ker} f \subseteq H_f^r \implies H_f^r = x_0 + \mathrm{Ker} f,$$

这便说明了 $\mathscr{L}$ 是超平面. □

定义 2.3.4. 设 $\mathscr{X}$ 是实线性空间, $E \subseteq \mathscr{X}$, 称 E **位于超平面** $\mathscr{L} = H_f^r$ **的一侧**, 如果对任意的 $x \in E$, 有 $f(x) \leqslant r$(或 $f(x) \geqslant r$). 设 $E, F \subseteq \mathscr{X}$, 称超平面 H_f^r **分离** E 与 F, 如果对任意的 $x \in E$, 有 $f(x) \leqslant r$(或 $f(x) \geqslant r$), 及对任意的 $x \in F$, 有 $f(x) \geqslant r$(或 $f(x) \leqslant r$). 如果上述不等式严格成立, 则称超平面 H_f^r **严格分离** E.

定理 2.3.8. *设 E 是实线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 以 0 为内点的真凸子集, $x_0 \notin E$, 则存在闭超平面分离 x_0 与 E.*

证明. 设 P 是伴随 E 的 Minkowski 泛函, 则 P 在 $\mathscr{X}$ 上满足正齐次性与次可加性, 且

$$P(x) \leqslant 1, \quad \forall x \in E, \quad P(x_0) \geqslant 1.$$

由于 0 是 E 的内点, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(0, \delta) \subseteq E$. 又对任意的 $x \in \mathscr{X}, x \neq 0$, 有 $\dfrac{\delta x}{2\|x\|} \in B(0, \delta)$, 因此

$$P\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right) \leqslant 1 \implies P(x) \leqslant \frac{2\|x\|}{\delta}.$$

令 $\mathscr{X}_0 = \mathrm{span}\{x_0\} = \{\lambda x_0 | \lambda \in \mathbb{R}\}$, 定义 $f_0 : \mathscr{X}_0 \to \mathbb{R}, \lambda x_0 \mapsto \lambda P(x_0)$, 则 f_0 是 $\mathscr{X}_0$ 上的线性泛函, 且

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda P(x_0) \leqslant P(\lambda x_0), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

从而, 由 Hahn-Banach 延拓定理知, 存在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 f, 使得

(1) $f(\lambda x_0) = f_0(\lambda x_0) = \lambda P(x_0), \forall \lambda \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) \leqslant P(x), \forall x \in \mathscr{X}$.

于是, 有 $f(x_0)=P(x_0)\geqslant 1$. 又对任意的 $x\in E$, $f(x)\leqslant P(x)\leqslant 1$, 故超平面 H_f^1 分离 x_0 及 E. 下面证明 f 是有界的: 根据 $f(x)\leqslant P(x)$, 以及 $-f(x)=f(-x)\leqslant P(-x)$ 得知

$$|f(x)|\leqslant \max\{P(x),P(-x)\}\leqslant \frac{2\|x\|}{\delta},$$

从而 f 是有界的, 故 $f\in\mathscr{X}^*$. □

定理 2.3.9. *设 E,F 是实线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 中不相交的非空凸子集, E 有内点, 则存在超平面分离 E 与 F.*

证明. 令 $G=E-F=\{x-y|x\in E,y\in F\}$, 则

(1) G 是凸的, 这是因为 E,F 是凸的;

(2) $0\notin G$, 这是因为 $E\cap F=\varnothing$;

(3) G 有内点 x_0, 这是因为 E 有内点.

由定理 (2.3.8) 知, 存在超平面 H_f^r 分离 0 与 G, 也即存在 $f\in\mathscr{X}^*$ 及 $r>0$, 使得

$$f(x)\leqslant r,\quad \forall x\in G,\quad f(0)\geqslant r.$$

由 $f(0)=0\geqslant r$ 知 $r\leqslant 0$, 所以 $f(x)\leqslant 0$ 对任意的 $x\in G$ 成立, 从而

$$f(x)\leqslant f(y),\quad \forall x\in E,\quad \forall y\in F.$$

上式左端可以取上确界, 右端可以取下确界, 令 $r'\in\left[\sup\limits_{x\in E}f(x),\inf\limits_{y\in F}f(y)\right]$, 则超平面 H_f^r 分离 E 与 F. □

定理 2.3.10 (Ascoli 定理). *设 E 是实线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 中的闭凸集, $x_0\notin E$, 则存在 $f\in\mathscr{X}^*$ 及 $r\in\mathbb{R}$, 使得*

$$f(x)\leqslant r<f(x_0),\quad \forall x\in E.$$

证明. 由 E 是闭的, $x_0\notin E$ 知存在 $\delta>0$, 使得 $B(x_0,\delta)\subset E^C$. 也即 $B(x_0,\delta)\cap E=\varnothing$. 由定理 (2.3.9) 知, 存在 $f\in\mathscr{X}^*$ 及 $r\in\mathbb{R}$, 使得

$$f(x)\geqslant r,\quad \forall x\in B(x,\delta);\quad f(x)\leqslant r,\quad \forall x\in E.$$

又根据 $\inf\limits_{x\in B(x_0,\delta)}f(x)<f(x_0)$ 知

$$f(x)\leqslant r<f(x_0),\quad \forall x\in E.$$ □

定理 2.3.11. 设 E 是实线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 中的有内点的闭凸集, F 是 $\mathscr{X}$ 中的线性流形, 也即存在 $\mathscr{X}$ 的线性子空间 $\mathscr{X}_0$ 及 $x_0 \in \mathscr{X} \setminus \mathscr{X}_0$, 使得 $F = x_0 + \mathscr{X}_0$. 如果 $\mathring{E} \cap F = \varnothing$, 则存在包含 F 的超平面 L, 使得 E 在 L 的一侧, 也即存在线性泛函 f 及 $s \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x) = s$, $\forall x \in F$ 及 $f(x) \leqslant s$, $\forall x \in E$.

证明. E, F 是凸的, 根据定理 (2.3.9) 知, 存在线性泛函 f 及 $r \in \mathbb{R}$, 使得

$$f(x) \leqslant r, \quad \forall x \in E; \quad f(x) \geqslant r, \quad \forall x \in F = x_0 + \mathscr{X}_0,$$

从而 $f(x) \geqslant r - f(x_0)$ 对任意的 $x \in \mathscr{X}_0$ 成立. 若 $x \in \mathscr{X}_0$ 非零, 则 $tx, -tx \in \mathscr{X}_0$, 从而 $f(-tx) = -tf(x) \to -\infty (t \to \infty)$, 此与上式矛盾, 从而

$$f(x) = r - f(x_0), \quad \forall x \in \mathscr{X}_0.$$

对任意的 $x \in F$, 存在 $y \in \mathscr{X}_0$, 使得 $x = x_0 + y$, 从而 $f(x) = f(x_0) + f(y) = r$, 这便说明了 $F \subset H_f^r$. □

2.4　泛函的表示

定理 2.4.1. $(\ell^1)^*$ 中的每一个元素都可以表示为

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j, \quad \forall \boldsymbol{x} = \{x_i\} \in \ell^1$$

其中 $\boldsymbol{a} = \{a_j\} \in \ell^\infty$, $\boldsymbol{a}$ 由 f 唯一决定, 且 $\|f\|_{(\ell^1)^*} = \|\boldsymbol{a}\|_{\ell^\infty}$.

证明. 首先说明唯一性. 令 $\boldsymbol{e}_j$ 表示第 j 个元素为 1, 其余元素为 0 的向量. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \in \ell^\infty$, 使得

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j = \sum_{j=1}^{\infty} a'_j x_j, \quad \forall \boldsymbol{x} = \{x_i\} \in \ell^1,$$

则

$$\sum_{j=1}^{\infty} (a_j - a'_j) x_j = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} = \{x_i\} \in \ell^1.$$

令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j, j \geqslant 1$, 则 $a_j = a'_j$.

接下来, 对任意的 $\boldsymbol{x}=\{x_j\}\in\ell^1$, 由 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|x_j|<\infty$, 知 $\boldsymbol{x}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}x_j\boldsymbol{e}_j$ 在 ℓ^1 中收敛, 从而

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{\infty}x_jf(\boldsymbol{e}_j).$$

令 $a_j=f(\boldsymbol{e}_j)$, 则 $f(x)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}x_ja_j$, 且对任意的 $j\geqslant 1$,

$$|a_j|=|f(\boldsymbol{e}_j)|\leqslant\|f\|_{(\ell^1)^*}\|\boldsymbol{e}_j\|_{\ell^1}=\|f\|_{(\ell^1)^*}\implies\|\boldsymbol{a}\|_{\ell^\infty}=\sup_{j\geqslant 1}|a_j|\leqslant\|f\|_{(\ell^1)^\infty}.$$

另一方面, 对任意的 $\boldsymbol{x}\in\ell^1$,

$$|f(\boldsymbol{x})|=\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_jx_j\right|\leqslant\sup_{j\geqslant 1}|a_j|\cdot\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|=\|a\|_{\ell^\infty}\cdot\|\boldsymbol{x}\|_{\ell^1}\implies\|f\|_{(\ell^1)^*}\leqslant\|\boldsymbol{a}\|_{\ell^\infty},$$

因此 $\|f\|_{(\ell^1)^*}=\|\boldsymbol{a}\|_{\ell^\infty}$. □

定理 2.4.2. 如果 $1<p<\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则 $(\ell^p)^*$ 中的每一个元素 f 都可以表示为

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{\infty}c_jx_j,\quad\forall\boldsymbol{x}=\{x_j\}\in\ell^p,$$

其中 $\boldsymbol{c}=\{c_j\}\in\ell^q$ 由 f 唯一决定, 且 $\|f\|_{(\ell^p)^*}=\|\mathbf{c}\|_{\ell^q}$.

反之, 任取 $\boldsymbol{c}=\{c_n\}\in\ell^q$, 对任何 $\boldsymbol{x}=\{x_n\}\in\ell^p$, 由 $f(x)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}c_jx_j$ 定义的泛函 $f\in(\ell^p)^*$.

证明. 设 $f\in(\ell^p)^*$, $e_j=(0,0,\cdots,1,0,\cdots)$, 则对任何 $\boldsymbol{x}=\{x_n\}\in\ell^p$, 有 $\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{\infty}x_je_j$ 在 ℓ^p 中收敛. 于是有 $f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}x_jf(e_j)$. $\forall j\geqslant 1$, 令 $c_j=f(e_j)$, 从而对任何 $\boldsymbol{x}=\{x_n\}\in\ell^p$, $f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}c_jx_j$. 再令 $\boldsymbol{x}^n=\{\zeta_j^{(n)}\}$, 其中

$$\zeta_j^{(n)}=\begin{cases}|c_j|^{q-2}c_j, & j\leqslant n,\\ 0, & j>n.\end{cases}$$

则 $\boldsymbol{x}^n\in\ell^p$. 于是

$$\sum_{j=1}^{n}|c_j|^q=f(x_n)\leqslant\|f\|\left(\sum_{j=1}^{n}|\zeta_j^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\|\left(\sum_{j=1}^{n}|c_j|^q\right)^{\frac{1}{p}}.$$

从而对任何 $n \geqslant 1$, $\left(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|$. 即 $\boldsymbol{c} = \{c_j\} \in \ell^q$ 且 $\|\boldsymbol{c}\| \leqslant \|f\|$. 由 Hölder 不等式知,

$$|f(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \cdot |x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|\boldsymbol{c}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|.$$

从而 $\|f\| \leqslant \|\boldsymbol{c}\|$. 因此有 $\|f\| = \|\boldsymbol{c}\|$.

假设还存在 $\boldsymbol{c}' = \{c_n'\} \in \ell^q$, 使得对任何 $\boldsymbol{x} = \{x_n\} \in \ell^p$, 有 $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j' x_j$, 则对任何 $\boldsymbol{x} = \{x_n\} \in \ell^p$, 有 $\sum_{j=1}^{\infty}(c_j - c_j')x_j = 0$. $\forall j \geqslant 1$, 取 $\boldsymbol{x} = e_j$, 则对任何 $j \geqslant 1$, 取 $c_j' = c_j$, 从而 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}'$. □

定理 2.4.3. 设 $1 < p, q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. 如果 f 是 $L^p(a,b)$ 上的有界线性泛函, 则存在唯一的 $y \in L^q(a,b)$, 使得对任何 $x \in L^p(a,b)$, 有

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

且

$$\|f\| = \|y\|_{L^q(a,b)}. \tag{2.4}$$

相反, 对任何固定的 $y \in L^q(a,b)$, 令 $f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$, 则 f 是 $L^p(a,b)$ 上的有界线性泛函. 因此, 如果 $T : (L^p(a,b))^* \to L^q(a,b)$ 定义为

$$T(f) = y,$$

则 T 是保持范数不变的线性同构.

证明. 对任何固定的 $y \in L^q(a,b)$ 及任意的 $x \in L^p(a,b)$, 令

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

则 f 为 $L^p(a,b)$ 上的线性泛函, 且由 Hölder 不等式知,

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} = \|y\|_{L^q}\|x\|_{L^p}.$$

因此

$$\|f\| \leqslant \|y\|_{L^q(a,b)}. \tag{2.5}$$

取

$$x(t) = |y(t)|^{q-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(t)}, \quad t \in [a,b],$$

其中 $\theta(t) = \mathrm{Arg} y(t)$. 则

$$\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t = \int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t < \infty.$$

因此 $x \in L^p(a,b)$, 并且

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t.$$

两边同除 $\|x\|_{L^p(a,b)}$, 有

$$f\left(\frac{x}{\|x\|_p}\right) = \left(\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1-\frac{1}{p}} = \|y\|_{L^q(a,b)}.$$

因此有

$$\|f\| \geqslant \|y\|_{L^q(a,b)}. \tag{2.6}$$

结合 (2.5) 可得 $\|f\| = \|y\|_{L^q(a,b)}$. 这表明只要 f 满足 (2.3) 的形式, 就有 (2.4) 成立.

现在的问题是对于 $L^p(a,b)$ 上的有界线性泛函 f, 如何寻求 $y \in L^q(a,b)$ 使得 (2.3) 成立. 为此, 让

$$Y(t) = f(\chi_{[a,t)}),$$

其中 $\chi_{[a,t)}$ 表示 $[a,t)$ 上的特征函数, 即

$$\chi_{[a,t)}(s) = \begin{cases} 1, & s \in [a,t), \\ 0, & s \in [t,b). \end{cases}$$

显然 $Y(t)$ 为 $[a,b]$ 上以 Λ 为值域的函数. 下面验证 $Y(t)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. 事实上, 对于 $[a,b]$ 内的任何有限个互不相交的小区间 $[a_i,b_i), i = 1,2,\cdots,n$, 令

$$\varepsilon_i = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_i}, \quad \theta_i = \mathrm{Arg}(Y(b_i) - Y(a_i)),$$

则

$$\sum_{i=1}^n |Y(b_i) - Y(a_i)| = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (Y(b_i) - Y_{a_i})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left[f(\chi_{[a,b_i)}) - f(\chi_{[a,a_i)}) \right] \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left(\chi_{[a,b_i)} - \chi_{[a,a_i)} \right) \right) \\
&\leqslant \|f\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot \chi_{[a_i,b_i)} \right\|_{L^p(a,b)} \\
&= \|f\| \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} 1^p \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\| \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

由此可知, $Y(t)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. 记

$$
y(t) = Y'(t),
$$

则 $y \in L^1[a,b]$, 并且由于 $Y(a) = 0$, 故由 Newton-Leibniz 公式可知,

$$
Y(t) = \int_a^t y(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b].
$$

于是

$$
f\left(\chi_{[a_i,b_i)}\right) = \int_a^t y(s)\mathrm{d}s = \int_a^b \chi_{[a,t)}(s)y(s)\mathrm{d}s.
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
f\left(\chi_{[a_i,b_i)}\right) &= f\left(\chi_{[a,b_i)} - \chi_{[a,a_i)}\right) \\
&= f\left(\chi_{[a,b_i)}\right) - f\left(\chi_{[a,a_i)}\right) \\
&= \int_a^b \left(\chi_{[a,b_i)} - \chi_{[a,a_i)}\right)(s)y(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_a^b \chi_{[a_i,b_i)}(s)y(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

因此有

$$
f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{[a_i,b_i)} \right) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{[a_i,b_i)}(s) \right) y(s)\mathrm{d}s.
$$

这表明对 $[a,b]$ 上的任何简单函数 $x(t)$, 都有

$$
f(x) = \int_a^b x(s)y(s)\mathrm{d}s.
$$

而任何有界可测函数 $x(t)$ 都可以由一列简单函数 $\{x_n\}$ 一致逼近, 根据 Lebesgue 控制收敛定理及 f 的连续性, 有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(s)y(s)\mathrm{d}s=\int_a^b x(s)y(s)\mathrm{d}s.$$

下面我们证明 $y\in L^q[a,b]$, 令

$$y_n(t)=\begin{cases}|y(t)|^{q-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(t)}, & t\in[a,b],\quad |y(t)|\leqslant n,\\ 0, & t\in[a,b],\quad |y(t)|>n.\end{cases}$$

并记 $E_n=\{t\in[a,b]:|y(t)|\leqslant n\}$, 则

$$f(y_n)=\int_a^b y_n(t)y(t)\mathrm{d}t=\int_{E_n}|y(t)|^q\mathrm{d}t. \tag{2.7}$$

由于

$$\|y_n\|_{L^p[a,b]}=\left(\int_{E_n}|y_n(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_{E_n}|y(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},$$

在 (2.7) 两边同时除以 $\|y_n\|_{L^p[a,b]}$, 有

$$f\left(\frac{y_n}{\|y_n\|_{L^p}}\right)=\left(\int_{E_n}|y(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|.$$

式中令 $n\to\infty$, 即可得到 $\|y\|_{L^q[a,b]}\leqslant\|f\|$.

最后我们证明 $\forall x\in L^p[a,b]$, 有

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

事实上, 对任何 $x\in L^p[a,b]$, 令

$$x_n(t)=\begin{cases}x(t), & |x(t)|\leqslant n,\\ 0, & |x(t)|>n.\end{cases}$$

则当 $n\to\infty$ 时, $\|x_n-x\|_{L^p[a,b]}\to 0$. 而当 $n\to\infty$ 时, 由 Hölder 不等式可知,

$$\left|\int_a^b(x_n(t)-x(t))y(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left(\int_a^b|x_n(t)-x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|y(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}.$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

结合 f 的连续性可得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t. \qquad \square$$

定理 2.4.4. 设 $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. (Ω, Σ, μ) 为 σ-有限的测度空间. 则对每一个 $f \in (L^p(\Omega, \mu))^*$, 存在唯一的 $v \in L^q(\Omega, \mu)$, 使得当 $u \in L^p(\Omega, \mu)$ 时, 有

$$f(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}\mu,$$

并且

$$\|f\| = \|v\|_{L^q(\Omega,\mu)}.$$

反之, 对每个固定的 $v \in L^q(\Omega, \mu)$, 令

$$f(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}\mu,$$

则 $f \in (L^p(\Omega, \mu))^*$. 因此, 如果

$$T : (L^p(\Omega, \mu))^* \to L^q(\Omega, \mu)$$

定义为

$$T(f) = v,$$

则 T 是保持范数不变的线性同构.

定理 2.4.5. 设 (Ω, Σ, μ) 为 σ-有限的测度空间. 对每个给定的 $v \in L^\infty(\Omega, \mu)$, 定义 $f : L^1(\Omega, \mu) \to \mathbb{R}$ 为:

$$f(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}\mu, \tag{2.8}$$

则 $f \in (L^1(\Omega, \mu))^*$, 且

$$\|f(u)\| = \|v\|_\infty.$$

反之, 对每个给定的 $f \in (L^1(\Omega, \mu))^*$, 存在唯一的 $v \in L^\infty(\Omega, \mu)$, 使得对任何 $u \in L^1(\Omega, \mu)$, 有 *(2.8)* 成立.

2.5 自反空间

定义 2.5.1. 设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间, $\mathscr{X}^*$ 的对偶空间称为 $\mathscr{X}$ 的**二次对偶空间**, 记作 $\mathscr{X}^{**}$. $\forall x \in \mathscr{X}$, 定义

$$x^{**}(f) = f(x), \quad \forall f \in \mathscr{X}^*.$$

容易验证 x^{**} 是 $\mathscr{X}^*$ 上的线性泛函, 且

$$\|x^{**}\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |x^{**}(f)| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |f(x)| \leqslant \|x\|. \tag{2.9}$$

因此 $x^{**} \in \mathscr{X}^{**}$, 且 x^{**} 是有界的.

下面, 定义映射

$$\begin{aligned} \tau:\ \mathscr{X} &\to \mathscr{X}^{**}, \\ x &\mapsto x^{**}. \end{aligned}$$

并称 τ 为从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}^{**}$ 的**典型映射**.

$\forall x, y \in \mathscr{X}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned} &[\tau(\alpha x + \beta y)](f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \\ =&\alpha[\tau(x)](f) + \beta[\tau(y)](f) = [\alpha\tau(x) + \beta\tau(y)](f). \end{aligned}$$

而上式是对任意的 $f \in \mathscr{X}^*$ 均成立的. 因此 $\tau(\alpha x + \beta y) = \alpha\tau(x) + \beta\tau(y)$, 从而 τ 为线性的.

通过上述推导, $\|\tau(x)\| \leqslant \|x\|$ 成立, 而由 (2.9) 式知, 当 $\|x\| = 0$ 时, $\|x^{**}\| = \|x\| = 0$; 当 $x \neq 0$ 时, 根据 Hahn-Banach 定理的推论 (2.3.1), 存在 $f_0 \in \mathscr{X}^*$, 使得 $\|f_0\| = 1$ 且 $f_0(x) = \|x\|$. 从而有

$$\|x^{**}\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |x^{**}(f)| \geqslant |f_0(x)| = \|x\|,$$

即 $\|x^{**}\| \geqslant \|x\|$. 综上两方面, 有 $\|\tau(x)\| = \|x^{**}\| = \|x\|$.

因此, τ 为 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}^{**}$ 的一个子空间 $\tau(\mathscr{X})$ 的等距同构.

定义 2.5.2. 设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间, 如果 $\tau(\mathscr{X}) = \mathscr{X}^{**}$, 则称 $\mathscr{X}$ 为**自反的**.

定理 2.5.1. 有限维线性赋范空间都是自反的.

证明. 设 $\mathscr{X}$ 为 n 维线性赋范空间, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 $\mathscr{X}$ 的一组基. 根据 Hahn-Banach 定理的推论 (2.3.8), 存在 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathscr{X}^*$, 使得

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

显然, $f_1, \cdots, f_n$ 是线性无关的. 对任意的 $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in \mathscr{X}$,

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n x_j f_i(e_j) = x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

故对任何 $f \in \mathscr{X}^*$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n f(e_j) f_j(x) = \left[\sum_{j=1}^n f(e_j) f_j\right](x).$$

从而

$$f = \sum_{j=1}^n f(e_j) f_j.$$

这表明 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 也是 $\mathscr{X}^*$ 的一组基, 即 $\mathscr{X}^*$ 也为 n 维空间. 同理, $\mathscr{X}^{**}$ 亦为 n 维的. 而 τ 是保范的线性映射, 因此 $\tau(\mathscr{X})$ 与 $\mathscr{X}$ 的维数相同, 从而 $\tau(\mathscr{X}) = \mathscr{X}^{**}$. $\square$

定理 2.5.2. 设 $(\varOmega, \mathscr{F}, \mu)$ 为 σ-有限的测度空间, 若 $1 < p < \infty$, 则 $L^p(\varOmega, \mu)$ 为自反空间.

证明. 只需证明 $\forall F \in (L^p(\varOmega, \mu))^{**}$, 存在 $u \in L^p(\varOmega, \mu)$, 使得

$$F(f) = f(u), \quad \forall f \in (L^p(\varOmega, \mu))^*.$$

$\forall v \in L^q(\varOmega, \mu)$, 其中 $p^{-1} + q^{-1} = 1$, 考察映射 $T : L^q(\varOmega, \mu) \to (L^p(\varOmega, \mu))^*$, $T(v) = f$. 这里

$$f(x) = \int_\varOmega u(x) v(x) \mathrm{d}\mu, \quad u \in L^p(\varOmega, \mu).$$

根据 $(L^p(\varOmega, \mu))^*$ 的表示定理, T 为等距同构. 对于 $v \in L^q(\varOmega, \mu)$, 设 $F^*(v) = F(T(v))$. 易证 $F^* \in (L^q(\varOmega, \mu))^*$, 再根据定理, 存在 $u_0 \in L^p(\varOmega, \mu)$, 使得

$$F^*(v) = \int_\varOmega v(x) u_0(x) \mathrm{d}\mu, \quad v \in L^q(\varOmega, \mu).$$

现对任意的 $f \in (L^p(\Omega,\mu))^*$, 令 $v = T^{-1}(f)$, 则 $v \in L^q(\Omega,\mu)$, 且

$$f(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x, \quad u \in L^p(\Omega,\mu).$$

于是

$$F(f) = F(T(v)) = F^*(v) = \int_\Omega v(x)u_0(x)\mathrm{d}x = f(u_0). \qquad \square$$

定理 2.5.3. 设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间, 则 $\mathscr{X}^*$ 可分可以推出 $\mathscr{X}$ 可分; 若 $\mathscr{X}$ 是自反的, 则 $\mathscr{X}$ 可分也能推出 $\mathscr{X}^*$ 可分.

证明. 若 $\mathscr{X}^*$ 可分, 则 $\mathscr{X}^*$ 存在可数的稠密子集, 记作 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$. 不妨假设对于任意的 $n \geqslant 1$, $f_n \neq 0$, 并令 $g_n = \dfrac{f_n}{\|f_n\|}$. 由 $\{f_n\}$ 的稠密性, 对于任意的 $f \in S^1 = \{h \in \mathscr{X}^* : \|h\| = 1\}$, 都存在 $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$, 使得 f_{n_k} 在 $\mathscr{X}^*$ 中收敛于 f. 而

$$\begin{aligned}
\|g_{n_k} - f\| &\leqslant \|f_{n_k} - f\| + \|f_{n_k} - g_{n_k}\| \\
&= \|f_{n_k} - f\| + \big|1 - \|f_{n_k}\|\big| \\
&= \|f_{n_k} - f\| + \big|\|f\| - \|f_{n_k}\|\big| \\
&\leqslant 2\|f_{n_k} - f\| \to 0, \quad (k \to \infty).
\end{aligned}$$

从而 $\{g_n\}$ 在 S^1 中稠密.

由于 $\|g_n\| = 1$, 则存在 $x_n \in \mathscr{X}$, 使得 $|g_n(x_n)| \geqslant \dfrac{1}{2}$, $\|x_n\| = 1$. 令 $\mathscr{Y} = \overline{\operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^\infty}$, 则 $\mathscr{Y}$ 是可分的.

下面说明 $\mathscr{Y} = \mathscr{X}$. 若否, 由 Hahn-Banach 定理的推论 (2.3.5), 存在 $f \in \mathscr{X}^*$, 使得

(1) $f(x) = 0, \forall x \in \mathscr{Y}$;

(2) $f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, \mathscr{Y})$;

(3) $\|f\| = 1$.

从而 $\forall n \geqslant 1$,

$$\|g_n - f\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathscr{X}}} |(g_n - f)(x)| \geqslant |g_n(x_n) - f(x_n)| = |g_n(x_n)| \geqslant \frac{1}{2}.$$

这与 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 在 S^1 中稠密矛盾! 故 $\mathscr{X} = \mathscr{Y}$, 定理得证.

定理的后半部分是显然的. 若 $\mathscr{X}$ 自反, 则由 $\mathscr{X}$ 可分可以得到 $\mathscr{X}^{**}$ 可分, 再由第一部分的结论, 可以直接得到 $\mathscr{X}^*$ 可分. $\square$

定理 2.5.4. 设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间, 则 $\mathscr{X}$ 自反当且仅当 $\mathscr{X}$ 的任意闭子空间均为自反的.

证明. 由于 $\mathscr{X}$ 为其自身的闭子空间, 因此定理的充分性是平凡的. 假设 $\mathscr{Y}$ 为 $\mathscr{X}$ 的自反空间, 则要证 $\mathscr{Y}$ 是自反的, 只需要证明对任意的 $F \in \mathscr{Y}^{**}$, 存在 $x \in \mathscr{Y}$, 使得 $F(f) = f(x), \forall f \in \mathscr{Y}^*$.

$\forall f \in \mathscr{X}^*$, 由于

$$\|f\|_{\mathscr{Y}^*} = \sup_{\substack{x\in\mathscr{Y}\\ \|x\|\leqslant 1}} |f(x)| \leqslant \sup_{\substack{x\in\mathscr{X}\\ \|x\|\leqslant 1}} = \|f\|_{\mathscr{X}^*}.$$

从而若 $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$, 则 $\mathscr{Y}^* \supset \mathscr{X}^*$.

定义映射 $\widetilde{F}$ 为

$$\begin{aligned} \widetilde{F}:\ \mathscr{X}^* &\to \mathbb{R}, \\ f &\mapsto F(f|_{\mathscr{Y}}). \end{aligned}$$

由于

$$\left|\widetilde{F}(f)\right| = |F(f|_{\mathscr{Y}})| \leqslant \|F\|_{\mathscr{Y}^{**}} \|f|_{\mathscr{Y}}\|_{\mathscr{Y}^{**}} \leqslant \|F\|_{Y^{**}} \|f\|_{\mathscr{X}^{**}}.$$

从而 $\left\|\widetilde{F}\right\|_{\mathscr{X}^{**}} \leqslant \|F\|_{\mathscr{Y}^{**}}$, 故 $\widetilde{F} \in \mathscr{X}^{**}$. 由于 $\mathscr{X}$ 是自反的, 则存在 $x_0 \in \mathscr{X}$, 使得 $\tau(x_0) = \widetilde{F}$, 亦即

$$\widetilde{F}(f) = F(f|_{\mathscr{Y}}) = f(x_0), \quad \forall f \in \mathscr{X}^*.$$

若 $x_0 \notin \mathscr{Y}$, 则由 Hahn-Banach 定理的推论 (2.3.5), 存在 $f_0 \in \mathscr{X}^*$, $\|f_0\| = 1$, 且满足

(1) $f_0(x) = 0, \forall x \in \mathscr{Y}$;

(2) $d = \mathrm{dist}(x_0, \mathscr{Y}) = f_0(x_0) > 0$.

从而 $d = f_0(x_0) = F(f_0|_{\mathscr{Y}}) = F(0) = 0$, 矛盾! 故 $x_0 \in \mathscr{Y}$.

$\forall f \in \mathscr{Y}^*$, 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $\widetilde{f} \in \mathscr{X}^*$, 使得 $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$ 且 $\widetilde{f}(x) = f(x), \forall x \in \mathscr{Y}$, 亦即 $f = f|_{\mathscr{Y}}$. 从而

$$F(f) = F(\widetilde{f}|_{\mathscr{Y}}) = \widetilde{F}(\widetilde{f}) = \widetilde{f}(x_0) = f(x_0), \quad \forall f \in \mathscr{Y}.$$

从而 $F = \tau(x_0)$, 定理得证. □

2.6 序列弱收敛及序列的弱 * 收敛

定义 2.6.1. 设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间, $\{x_n\} \subset \mathscr{X}, x_0 \in \mathscr{X}$. 如果 $\forall f \in \mathscr{X}^*$, 有

$$f(x_n) \to f(x_0),$$

则称序列 $\{x_n\}$ **弱收敛于** x_0, 记为 $x_n \rightharpoonup x_0$, 并称 x_0 为序列 $\{x_n\}$ 的**弱极限**.
为区别起见, 我们称 $x_n \to x_0$(按范数收敛) 为 x_n **强收敛**于 x_0, 并称 x_0 为序列 $\{x_n\}$ 的**强极限**.

根据定义, 我们显然可以得到强收敛蕴含弱收敛.

下面, 我们列举几个弱收敛的例子:

- **例 21.** 设 $\mathscr{X} = L^2[0,1]$, 并设 $x_n = x_n(t) = \sin n\pi t$. 根据表示定理 (2.4.4), $\forall F \in \mathscr{X}^*$, 存在唯一 $f \in L^2[0,1]$ 使得

$$F(x_n) = \int_0^1 f(t)x_n(t)\mathrm{d}t \to 0 = F(0).$$

其中的极限关系是由 Riemann-Lebesgue 定理得到的. 因此有 $x_n \rightharpoonup 0$.
但由于

$$\|x_n\| = \left(\int_0^1 |x_n(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

因此 $x_n \not\to 0$.

- **例 22.** 设 $\mathscr{X} = \ell^p(1 < p < \infty)$, 根据泛函的表示定理 (2.4.2), $\forall \boldsymbol{x} = \{x_n\} \in \ell^p$, 存在唯一的 $\boldsymbol{a} = \{a_n\} \in \ell^q$, 使得

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j.$$

因此 $f(\boldsymbol{e}_j) = a_j \to 0$, 从而 $\boldsymbol{e}_j \rightharpoonup 0$, 但 $\|\boldsymbol{e}_j\| = 1$, 因此 $\boldsymbol{e}_j \not\to 0$.

上述两个例子表明, 序列的强收敛与弱收敛并不相同.

- **例 23.** 设 $\mathscr{X}$ 为有限维线性赋范空间且 $\dim \mathscr{X} = k$, $\{x^{(n)}\} \subset \mathscr{X}$, $x_0 \in \mathscr{X}$. 则

$$x^{(n)} \rightharpoonup x_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{x_n\}\text{ 按坐标收敛于 } x_0.$$

证明. 首先, 根据推论 (2.2.3) 的结论, 在有限维线性赋范空间中按坐标收敛与强收敛等价, 而强收敛蕴含弱收敛, 因此充分性是显然的.

假设 $\{e_j\}_{j=1}^k$ 为 $\mathscr{X}$ 的一组基底, 且

$$x^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} x_j(n) e_j, \qquad x_0 = \sum_{j=1}^{k} x_j^{(0)} e_j.$$

则根据推论 (2.3.8) 的结论, 存在 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathscr{X}^*$, 使得

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant k.$$

根据弱收敛的定义, $x_i^{(n)} = f_i(x^{(n)}) \to f_i(x_0) = x_i^{(0)}$, 因此 $\{x^{(n)}\}$ 按照坐标收敛于 x_0. □

这个例子表明, 在有限维线性赋范空间中, 强收敛与弱收敛等价.

- **例 24.** 在 ℓ^1 中, 弱收敛与强收敛等价.

有了弱收敛的定义, 便可以自然地给出在弱收敛意义下的闭的定义:

定义 2.6.2. 设 E 为线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 中的点集, 称 E 是**弱序列闭**的, 如果 $\forall \{x_n\} \subset E$ 且 $x_n \rightharpoonup x_0$, 必有 $x_0 \in E$.

定理 2.6.1. 线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 中任何闭凸集都是弱序列闭的.

证明. 假设存在 $\mathscr{X}$ 中的闭凸集 E 非弱序列闭的, 则存在 $\{x_n\} \subset \mathscr{X}$, $x_n \rightharpoonup x_0$ 且 $x_0 \notin E$. 根据 Ascoli 定理 (2.3.10), 存在实的非零有界线性泛函 f 及 $r \in \mathbb{R}$, 使得

$$f(x) \leqslant r < f(x_0), \quad \forall x \in E.$$

$\forall x \in \mathscr{X}$, 令 $F(x) = f(x) - \mathrm{i} f(-\mathrm{i}x)$, 则 $F \in \mathscr{X}^*$, 故由 $x_n \rightharpoonup x_0$ 可以推出 $F(x_n) \to F(x_0)$. 从而 $\mathrm{Re}F(x_n) \to \mathrm{Re}F(x_0)$, 即 $f(x_n) \to f(x_0)$, 这与 x_n 和 x_0 严格分离矛盾! □

定义 2.6.3. 设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间, $\mathscr{X}^*$ 为 $\mathscr{X}$ 的对偶空间, 若 $\{f_n\} \subset \mathscr{X}^*$, $f_0 \in \mathscr{X}^*$, 称 $\{f_n\}$ **弱 * 收敛于** f_0, 如果对任意的 $x \in \mathscr{X}$, 均有 $f_n(x) \to f_0(x)$

定义 2.6.4. 设 A 为线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 的子集, 称 A 为**弱列紧**的, 如果 A 中任何点列都有在 $\mathscr{X}$ 中收敛的子列.

设 C 为 $\mathscr{X}^*$ 中的点列, 称 C 为**弱 * 列紧**的, 如果 C 中任何点列都有在 $\mathscr{X}^*$ 中弱 *收敛的子列.

定理 2.6.2. 设 $\mathscr{X}$ 为可分的线性赋范空间, 则 $\mathscr{X}^*$ 中依范数有界集是弱 * 列紧的.

证明. 若 $\mathscr{X}$ 可分, 则存在 $\mathscr{X}$ 的可数稠密子集, 记作 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 设 A 为 $\mathscr{X}^*$ 中的有界集, 对于 A 中任意的函数列 $\{f_n\}$, 考察 $\{f_n\}$ 作用在 x_k 上得到的数列. 当 $k=1$ 时, 由于

$$|f_n(x_1)| \leqslant \|f_n\|_{\mathscr{X}^*}\|x_1\|_{\mathscr{X}},$$

因此 $\{f_n(x_1)\}$ 为有界数列, 从而存在其收敛子列 $\{f_n^{(1)}(x_1)\}$. 当 $k=2$ 时, $\{f_n^{(1)}(x_2)\}$ 有界, 因此存在子列 $\{f_n^{(2)}(x_2)\}$ 收敛. 依次进行下去, 对于 x_k, $\{f_n^{(k-1)}(x_k)\}$ 有界, 存在其收敛子列 $\{f_n^{(k)}(x_k)\}$.

经过上述操作, 取 $\{f_k^{(k)}\} \subset \{f_n\}$, 则该序列对于所有的 x_j 均收敛. 为了便于表述, 记 $g_k = f_k^{(k)}$, 从而 $\{g_k(x_j)\}$ 收敛, $\forall j \geqslant 1$.

根据稠密的定义, $\forall x \in \mathscr{X}, \forall \varepsilon > 0$, 存在 $y \in \{x_n\}$, 使得 $|x-y| < \varepsilon$. 因此

$$\begin{aligned}
\|g_k(x) - g_j(x)\| &\leqslant \|g_k(x) - g_k(y)\| + \|g_k(y) - g_j(y)\| + \|g_j(y) - g_j(x)\| \\
&\leqslant \|g_k\| \cdot \|x-y\| + \|g_j\| \cdot \|x-y\| + \|g_k(y) - g_j(y)\| \\
&< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + \|g_k(y) - g_j(y)\| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon, \quad (k, j \to \infty).
\end{aligned}$$

因此 $\{g_k(x)\}$ 为 Cauchy 列.

令 $f(x) := \lim\limits_{k\to\infty} g_k(x)$, 容易验证 f 为线性的. 又由于

$$|f(x)| = \lim_{k\to\infty} |g_k(x)| \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|g_k\| \cdot \|x\| \leqslant M\|x\|.$$

因此 f 有界, 从而 $f \in \mathscr{X}^*$. □

定理 2.6.3. 自反的 *Banach* 空间 $\mathscr{X}$ 中的有界集为弱列紧的.

证明. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathscr{X}$ 中的序列, 令

$$\mathscr{Y}=\overline{\operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}},$$

根据定理 (2.5.3) 的证明, 可以得到 $\mathscr{Y}$ 是可分的. 由于 $\mathscr{Y}$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭子空间以及 $\mathscr{X}$ 自反, 根据定理 (2.5.4), $\mathscr{Y}$ 也是自反的.

根据定理 (2.6.2) 中的结论, 存在 $\{x_n\}$ 的在 $\mathscr{Y}$ 中弱收敛的子列 $\{x_{n_j}\}$, 也就是说, 存在 $x_0\in\mathscr{Y}$, 使得

$$f(x_{n_j})\to f(x_0),\quad \forall f\in\mathscr{Y}^*.$$

从而 $\forall f\in\mathscr{X}^*$, 有

$$f(x_{n_j})=f|_{\mathscr{Y}}(x_{n_j})\to f|_{\mathscr{Y}}(x_0)=f(x_0).$$

即 $\{x_{n_j}\}$ 弱收敛到 x_0, 定理得证! $\square$

第三章　有界线性算子

3.1　有界线性算子的定义及性质

定义 3.1.1. 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性赋范空间, $D \subset \mathscr{X}$ 是线性子空间, 称 $A: D \to \mathscr{Y}$ 是**有界线性算子**, 如果

(1) A 是线性的, 也即对任意的 $x, y \in D$, 任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 有

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay;$$

(2) A 是有界的, 也即存在 $M > 0$, 使得对任意的 $x \in D$, 有

$$\|Ax\| \leqslant M\|x\|.$$

称 D 是 A 的**定义域**, $R(A) = \{Ax | x \in D\}$ 为 A 的**值域**.

• **例 25.** 设 $p, q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集, K 是 $\Omega \times \Omega$ 上的可测函数且 $\displaystyle\int_\Omega \int_\Omega |K(x,y)|^q \mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$. 对任意的 $u \in L^p(\Omega)$, 定义

$$(Au)(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)\mathrm{d}y.$$

则 $A: L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ 是有界线性算子.

证明. 线性是容易得到的, 因为积分是线性的. 对于有界性, 计算得

$$
\begin{aligned}
\|Au\|_{L^q(\Omega)}^q &= \int_\Omega \|(Au)(x)\|^q \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \left|\int_\Omega K(x,y)u(y)\mathrm{d}y\right|^q \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_\Omega \left[\left(\int_\Omega |K(x,y)|^q \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |u(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\right]^q \\
&\leqslant \left(\int_\Omega\int_\Omega |K(x,y)|^q \mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)\left(\int_\Omega |u(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{q}{p}},
\end{aligned}
$$

因此

$$
\|Au\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \left(\int_\Omega\int_\Omega |K(x,y)|^q \mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \|u\|_{L^p(\Omega)}.
$$

□

• **例 26.** 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是有限维线性赋范空间, $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $\mathscr{X}$ 的一组基, $e_1', e_2', \cdots, e_m'$ 是 $\mathscr{Y}$ 的一组基, 如果存在 $n\times m$ 阶矩阵 (a_{ij}), 使得

$$
Ae_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}e_j',
$$

对任意的 $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathscr{X}$, 定义

$$
Ax = \sum_{i=1}^n x_i A e_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i a_{ij} e_j',
$$

则 $A: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是有界线性算子.

证明. 对于有界性, 根据引理 (2.2.1) 得

$$
\|Ax\|_{\mathscr{Y}} \leqslant C\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C'\|x\|
$$

□

• **例 27.** 设 $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = C([0,1])$, $A = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是无界线性算子, 例如考虑 $x_n = t^n$, 则 $\|x_n\| = 1$, 但是 $\left\|\dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\right\| = n$. 但 $A = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}: C^1([0,1]) \to C([0,1])$ 是有界

线性算子, 其中

$$\|f\|_{C^1([0,1])} = \max_{t\in[0,1]} |f(t)| + \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|.$$

定义 3.1.2. 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是线性赋范空间, $D \subset \mathscr{X}$ 是线性子空间, $A : D \to \mathscr{Y}$ 是线性算子, $x_0 \in D$, 称 A 在 x_0 点**连续**, 如果对任意的 $\{x_n\} \subset D$, 且 $x_n \to x_0$, 有 $Ax_n \to Ax_0$.

定理 3.1.1. *设 $A : D \to \mathscr{Y}$ 是线性算子, 则下列条件等价:*

(1) A 是有界的;

(2) A 在 D 上每一点都连续;

(3) A 在 D 上某一点连续.

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2): 设 A 有界, 则存在 $M > 0$, 对任意的 $x \in D$, 有 $\|Ax\| \leqslant M\|x\|$. 对任意的 $x_0 \in D$, $\{x_n\} \subset D$ 且 $x_n \to x_0$, 有

$$\|Ax_n - Ax_0\| = \|A(x_n - x_0)\| \leqslant M\|x_n - x_0\| \to 0.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3): A 在 D 上每一点都连续, 则 A 在 D 上任何一点都连续. [1]

(3) $\Longrightarrow$ (1): 不妨设 A 在原点连续, 则存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $\|x\| < \delta$,

$$\|Ax\| = \|Ax - A0\| < 1.$$

对 $x \neq 0$, 注意到 $\dfrac{\delta x}{2\|x\|} \in B(0, \delta)$, 则

$$\left\| A\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right) \right\| < 1 \implies \|Ax\| \leqslant \frac{2}{\delta}\|x\|, \quad \forall x \in D,$$

因此 A 有界的. □

以下, 记 $\mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是所有从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的有界线性算子, 对任意的 $x \in \mathscr{X}$, $A, B \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 定义

$$(A + B)(x) = Ax + Bx;$$

[1] 听君一席话, 如听一席话

对任意的 $x \in \mathscr{X}$, $\alpha \in K$, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 定义

$$(\alpha A)(x) = \alpha(Ax),$$

则 $\mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 再对任意的 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 定义

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

则 $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$ 对任意的 $x \in \mathscr{X}$ 成立, $\|\cdot\|$ 是 $\mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 上的一个范数, 从而可以得到 $(\mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}), \|\cdot\|)$ 是线性赋范空间.

定理 3.1.2. *如果 $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间, 则 $\mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是 Banach 空间. 进一步, 如果 $\mathscr{X} \neq \{0\}$ 且 $\mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是 Banach 空间, 则 $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间.*

如果 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, $B \in \mathcal{L}(\mathscr{Y}, \mathscr{Z})$, 定义

$$(BA)(x) = B(Ax),$$

则 $BA \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Z})$ 且 $\|BA\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|$, 后者是因为

$$\|BA\| = \sup_{\|x\|=1} \|B(Ax)\| \leqslant \|B\| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|B\| \cdot \|A\|.$$

如果 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X}) = \mathcal{L}(\mathscr{X})$, 则对任意的 $n \geqslant 1$, $A^n \in \mathcal{L}(\mathscr{X})$ 且 $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$.

3.2　Banach 逆算子定理及一致有界定理

设 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 如果 A^{-1} 存在且有界, 称 A 是**有界可逆的**, 或称 A 为**正则算子**.

定理 3.2.1. *如果 $A: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是线性算子且 A^{-1} 存在, 则 A^{-1} 是线性的.*

证明. 对任意的 $y_1, y_2 \in R(A)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 存在 $x_1, x_2 \in \mathscr{X}$, 使得 $y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2$. 又

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 \implies A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^{-1} y_1 + \beta A^{-1} y_2,$$

因此 A^{-1} 是线性的. $\square$

定理 3.2.2. 设 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 则 A 有界可逆 $\iff$ 存在 $B \in \mathcal{L}(\mathscr{Y}, \mathscr{X})$, 使得

$$AB = I_{\mathscr{Y}}, \quad BA = I_{\mathscr{X}}.$$

定理 3.2.3. $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, $B \in \mathcal{L}(\mathscr{Y}, \mathscr{Z})$ 都有界可逆, 则 BA 是有界可逆的, 且

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

引理 3.2.1. 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是线性赋范空间, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, $R(A)$ 是第二纲的, 则存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $r > 0$, 有

$$B_{\mathscr{Y}}(0, \delta r) \subset \overline{AB_{\mathscr{X}}(0, r)},$$

也即 0 是 $\overline{AB_{\mathscr{X}}(0,1)}$ 的内点.

证明. 注意到 $\mathscr{X} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(0, n)$, 因此

$$R(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} AB(0, n),$$

由 A 是第二纲的知, 存在 $n_0 \geqslant 1$, 使得 $AB(0, n_0)$ 在 $B(y_0, \delta)$ 中稠密, 也即 $B(y_0, \delta) \subset \overline{AB(0, n_0)}$. 对任意的 $y \in \mathscr{Y}$ 且 $\|y\| < \delta$, $y + y_0, y - y_0 \in B(y_0, \delta)$, 从而存在 $x_n, x_n' \in B(0, n_0)$, 使得

$$Ax_n \to y + y_0, \quad Ax_n' \to y_0 - y.$$

令 $y_n = \dfrac{x - x_n'}{2} \in B(0, n_0)$, 则

$$Ay_n \to y \implies A\left(\frac{y_n}{n_0}\right) \to \frac{y}{n_0}.$$

从而 $B(0, \delta) \subset \overline{AB(0, n_0)}$. 令 $\eta = \dfrac{\delta}{n_0}$, 则有 $B(0, \eta) \subset \overline{AB(0,1)}$, 此即说明 0 是 $\overline{AB_{\mathscr{X}}(0,1)}$ 的内点. □

引理 3.2.2. $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间, $\mathscr{Y}$ 为线性赋范空间, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 且 $R(A)$ 为

第二纲的, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$B_{\mathscr{Y}}(0, \varepsilon_0) \subset AB_{\mathscr{X}}(0, 1).$$

更一般地, $\forall r > 0$, 都有 $B(0, r\varepsilon_0) \subset AB(0, r)$.

证明. 我们想要证明, 对于任意的 $y \in B(0, \varepsilon_0)$, 都存在 $x \in B(0, 1)$, 使得 $y = Ax$.

根据引理 (3.2.1), 取 $r = 1$, 则存在 η 使得 $B(0, \eta) \subset \overline{AB(0, 1)}$. 从而任取 $y \in B(0, \eta)$, 存在 $x_1 \in B(0, 1)$, 使得 $\|y - Ax_1\| < \dfrac{\eta}{2}$.

再次利用引理 (3.2.1) 的结论, 有

$$y - Ax_1 \in B\left(0, \frac{\eta}{2}\right) \subset \overline{AB\left(0, \frac{1}{2}\right)}.$$

从而存在 $x_2 \in B\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, 使得 $\|y - Ax_1 - Ax_2\| < \dfrac{\eta}{4}$. 如此进行下去, 可以找到

$$x_n \in B\left(0, \frac{1}{2^{n-1}}\right), \quad \text{s.t.} \quad \left\| y - \sum_{j=1}^{n} Ax_j \right\| < \frac{n}{2^n}.$$

由于

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} < 2,$$

因此 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ 绝对收敛. 又由于 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间, 则存在 $x^* \in \mathscr{X}$, 使得 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j = x^*$.

$$\|x^*\| \leqslant \left\| x^* - \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| \leqslant 2 + \left\| x^* - \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|.$$

根据极限的保不等号性, 在上式中令 $n \to \infty$, 可知 $\|x^*\| \leqslant 2$. 而

$$\begin{aligned} \|y - Ax^*\| &\leqslant \left\| y - \sum_{j=1}^{n} Ax_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{n} Ax_j - Ax^* \right\| \\ &\leqslant \frac{n}{2^n} + \|A\| \cdot \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j - x^* \right\| \to 0, \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

从而我们得到了 $y = Ax^*$. 通过上面的推导, 我们证明了对于任意的 $y \in B(0, \eta)$, 始终存在 $x^* \in \overline{B(0, 2)}$, 使得 $y = Ax^*$. 因此 $B(0, \eta) \subset \overline{AB(0, 2)}$. 对齐进行伸缩变换, 即有

$$B\left(0, \frac{\eta}{3}\right) \subset \overline{AB\left(0, \frac{2}{3}\right)} \subset AB(0, 1).$$

因此在最开始我们只需要取 $\varepsilon_0 = \dfrac{\eta}{3}$ 即可满足要求. $\square$

定理 3.2.4 (开映射定理). 设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间, $\mathscr{Y}$ 为线性赋范空间, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 且 $R(A)$ 为第二纲的, 则 A 为**开映射**, 也就是说, A 将 $\mathscr{X}$ 中的开集映成 $\mathscr{Y}$ 中的开集.

证明. 设 O 为 $\mathscr{X}$ 中的开集, 我们需要证明 AO 为 $\mathscr{Y}$ 中的开集. 只需要证明, 对于任意的 $x \in O$, Ax 为 AO 的内点.

由引理 (3.2.2) 知, 存在 $\eta > 0$, 使得 $B(0, \eta) \subset AB(0, 1)$. 对其进行伸缩变换, 即可得到 $B(0, \eta\delta) \subset AB(0, \delta)$. 再将其沿着 Ax 方向进行平移, 则有

$$B(Ax, \eta\delta) = Ax + B(0, \eta\delta) \subset Ax + AB(0, \delta) = AB(x, \delta).$$

即 $B(Ax, \eta\delta) \subset AB(x, \delta) \subset AO$. 这便说明了 Ax 为 AO 的内点. 定理得证! $\square$

定理 3.2.5 (Banach 逆算子定理). 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是**一一到上**[a]的, 则 A^{-1} 为有界可逆的. 也就是说 $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathscr{Y}, \mathscr{X})$.

[a] 一一到上是指既是单射, 又是满射, 我们也称之为**双射**.

证明. 设 E 为 $\mathscr{X}$ 中的开集, 则由 Baire 纲定理, AE 为完备的度量空间, 从而为第二纲集. 根据开映射定理, AE 为 $\mathscr{Y}$ 中的开集. 从而 $(A^{-1})^{-1}(E) = AE$ 为开集, 因此 A^{-1} 连续, 从而 A^{-1} 有界, 定理得证. $\square$

注. 设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间, $\mathscr{Y}$ 为线性赋范空间, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 且 $R(A)$ 为第二纲的, 则 $R(A) = \mathscr{Y}$. 进一步地, 如果 A 为单射, 则 $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathscr{Y}, \mathscr{X})$.

事实上, 根据引理 (3.2.2) 的结论, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $B(0, \varepsilon_0) \subset AB(0, 1)$. 从而 $\forall y \neq 0$ 且 $y \in \mathscr{Y}$, 有

$$\frac{\varepsilon_0 y}{2\|y\|} \in B(0, \varepsilon_0) \subset AB(0, 1).$$

从而存在 $x_0 \in B(0, 1)$, 使得 $Ax_0 = \dfrac{\varepsilon_0 y}{2\|y\|}$, 则 $y = A\left(\dfrac{2\|y\|}{\varepsilon_0} \cdot x_0\right)$. 因此令 $x = \dfrac{2\|y\|}{\varepsilon_0} x_0$, 则 $Ax = y$. 从而 $R(A) = \mathscr{Y}$ 且 $\|x\| \leqslant \dfrac{2\|y\|}{\varepsilon_0}$.

定理 3.2.6 (等价范数定理). 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 均为线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 上的两个范数, 如果 $\mathscr{X}$ 在两个范数下都构成 *Banach* 空间且 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$, 则存在 $M>0$, 使得

$$\|x\|_1 \leqslant M \cdot \|x\|_2, \quad \forall x \in \mathscr{X}.$$

亦即范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

证明. 由于 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$, 则存在 $c>0$, 使得

$$\|x\|_2 \leqslant c \cdot \|x\|_1, \quad \forall x \in \mathscr{X}.$$

构造恒等映射 $\mathrm{Id} : (\mathscr{X}, \|\cdot\|_1) \to (\mathscr{X}, \|\cdot\|_2)$, 则其为有界线性算子, 即 $\mathrm{Id} \in \mathcal{L}\big((\mathscr{X}, \|\cdot\|_1), (\mathscr{X}, \|\cdot\|_2)\big)$, 且为一一到上的, 因此根据 Banach 逆算子定理,

$$(\mathrm{Id})^{-1} = \mathrm{Id} : (\mathscr{X}, \|\cdot\|_2) \to (\mathscr{X}, \|\cdot\|_1)$$

也为有界的, 因此存在 $M>0$, 使得对于任意的 $x \in \mathscr{X}$, $\|x\|_1 \leqslant M \cdot \|x\|_2$. □

定理 3.2.7 (闭图像定理). 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 均为 *Banach* 空间, $A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 为线性算子. 称 A 为**闭算子**, 如果 A 的图像

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in \mathscr{X}\}$$

为 $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ 中的闭集, 其中 $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ 上的范数定义为

$$\|(x,y)\|_{\mathscr{X}\times\mathscr{Y}} = \|x\|_{\mathscr{X}} + \|y\|_{\mathscr{Y}}, \quad \forall x \in \mathscr{X}, y \in \mathscr{Y}.$$

则在 $\mathscr{X}$ 上处处有定义的闭算子 A 必有界, 即 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

证明. 根据我们熟知的结论, 当 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 均为 Banach 空间时, $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ 也为 Banach 空间. 由于 $G(A)$ 为 $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ 中的闭集, 因此 $G(A)$ 也为 Banach 空间.

$\forall (x, Ax) \in G(A)$, 定义投影算子

$$T[(x, Ax)] = x,$$

则 $T : G(A) \to \mathscr{X}$ 为线性满射, 且 $T[(x, Ax)] = 0$ 当且仅当 $x = 0$, 此时 $Ax = 0$. 故可以推出 T 为单射, 从而 T 为一一到上的. 根据 Banach 逆算子定理, $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, G(A))$,

也就是说, 存在 $M>0$, 使得 $\forall x\in\mathscr{X}$,

$$\|Ax\|\leqslant\|x\|+\|Ax\|=\|(x,Ax)\|=\|T^{-1}(x)\|\leqslant M\|x\|.^{2}$$ □

引理 3.2.3. 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是线性赋范空间, $A:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是一一到上的有界线性算子, 则 $G(A^{-1})$ 是 $\mathscr{Y}\times\mathscr{X}$ 中的闭集, 也即 A^{-1} 是闭算子. 进一步, 如果 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间, 则 $A^{-1}\in\mathcal{L}(\mathscr{Y},\mathscr{X})$.

定理 3.2.8 (共鸣定理或一致有界定理). 设 $\mathscr{X}$ 是 *Banach* 空间, $\mathscr{Y}$ 是线性赋范空间, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 且对任意的 $x\in\mathscr{X}$, 有 $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|A_\lambda x\|<+\infty$, 其中 Λ 是指标集. 则 $\{\|A_\lambda\|,\lambda\in\Lambda\}$ 有界, 也即 $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|A_\lambda\|<+\infty$.

证明. 注意到

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda\in\Lambda}\|A_\lambda\|<+\infty &\iff \exists M>0,\text{s.t.}\sup_{\lambda\in\Lambda}\|A_\lambda\|<M\\ &\iff \sup_{\lambda\in\Lambda}\|A_\lambda x\|\leqslant M\|x\|,\forall x\in\mathscr{X}.\end{aligned}$$

(1) 令 $\|x\|_1=\|x\|+\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|A_\lambda x\|,\forall x\in\mathscr{X}$. 则可以验证 $(\mathscr{X},\|\cdot\|_1)$ 是 Banach 空间, 且 $\|x\|_1\geqslant\|x\|$. 由等价范数定理即可证明该定理.

(2) 定义 $p:\mathscr{X}\to\mathbb{R},p(x)=\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|A_\lambda x\|,\forall x\in\mathscr{X}$. 则可以验证 p 是 $\mathscr{X}$ 上的半范数, 且对任意的 $M>0$, 有

$$\{x\in\mathscr{X}|p(x)\leqslant M\}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\{x\in\mathscr{X}|\|A_\lambda x\|\leqslant M\}.$$

根据 $\{x\in\mathscr{X}|\|A_\lambda x\|\leqslant M\}$ 是闭集, 还可以得知 $\{x\in\mathscr{X}|p(x)\leqslant M\}$ 是闭集. 接下来, 由条件知, 对任意的 $x\in\mathscr{X}$, 有 $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|A_\lambda x\|<+\infty$, 从而存在 $k\geqslant1$, 使得 $p(x)\leqslant k$. 从而

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\in\mathscr{X}|p(x)\leqslant k\}.$$

由 Baire 纲定理及 $\mathscr{X}$ 的完备性, 存在 $k_0\geqslant1$ 及某个球 $B(x_0,\delta)$, 使得 $\{x\in\mathscr{X}|p(x)\leqslant k_0\}$ 在 $B(x_0,\delta)$ 中稠密, 也即

$$B(x_0,\delta)\subset\overline{\{x\in\mathscr{X}|p(x)\leqslant k_0\}}=\{x\in\mathscr{X}|p(x)\leqslant k_0\}.$$

[2]通过此式可以看出, 当我们将 $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ 上的范数定义为 $\|(x,y)\|_{\mathscr{X}\times\mathscr{Y}}=\max\{\|x\|_{\mathscr{X}},\|y\|_{\mathscr{Y}}\}$ 时, 也能通过不等放缩得到相同的结论.

对任意的 $x \in B(0,\delta)$, $x+x_0 \in B(x_0,\delta)$, 从而 $p(x+x_0) \leqslant k$, 又由 p 是半范数得

$$p(x) \leqslant p(x+x_0)+p(-x_0) = p(x+x_0)+p(x_0) \leqslant 2k_0.$$

最后, 对任意的 $x \in \mathscr{X}$, $x \neq 0$, $\dfrac{2x}{\delta\|x\|} \in B(0,\delta)$, 从而

$$p\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right) = \frac{\delta}{2\|x\|}\cdot p(x) \leqslant 2k_0,$$

据此得到 $p(x) = \sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|A_\lambda x\| \leqslant \dfrac{4k_0}{\delta}\cdot\|x\|$, 这便说明了定理成立. □

• **例 28.** 设 $\mathscr{X}$ 是线性赋范空间, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset X$. 如果对任意的 $f \in \mathscr{X}^*$, 存在 $M_f < +\infty$, 使得 $\sup\limits_{\alpha\in\Lambda}|f(x_\alpha)| < M_f$, 则 $\sup\limits_{\alpha\in\Lambda}\|x_\alpha\| < +\infty$.

证明. 考虑典型映射 τ, 由

$$\begin{cases} f(x_\alpha) = \tau(x_\alpha)(f), \\ \|\tau(x_\alpha)\| = \|x_\alpha\|, \end{cases}$$

且 $\mathscr{X}^*$ 是 Banach 空间, 应用共鸣定理即可. □

推论 3.2.1. 如果 $x_n \rightharpoonup x$, 则 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|x_n\| < +\infty$.

定理 3.2.9. *设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, $\mathscr{Y}$ 是线性赋范空间, $M \subset \mathscr{X}$ 在 $\mathscr{X}$ 中稠密, $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 则对任意的 $x \in \mathscr{X}$, $A_n x \to Ax$ 当且仅当*

(1) $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|A_n\| < +\infty$;

(2) 对任意的 $x \in M$, 有 $A_n x \to Ax$.

证明. 对 $x \in \mathscr{X}$, 存在 $y \in M$, $y \to x$. 从而

$$\begin{aligned} \|A_n x - Ax\| &\leqslant \|A_n x - A_n y\| + \|A_n y - Ay\| + \|Ay - Ax\| \\ &\leqslant (\|A_n\| + \|A\|)\cdot\|x-y\| + \|Ay_n - Ay\| \to 0, \end{aligned}$$

从而 $A_n x \to Ax$. □

对于弱收敛和弱 * 收敛, 也有类似的结论.

3.3 Banach 共轭算子

首先考虑有限维空间的情形. 对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 我们知道:

- $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量张成的子空间;
- $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量张成的子空间的正交补空间.

从而, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ 有解 $\iff$ 对任意的满足 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{x}$, 有 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

设 $\mathscr{X}$ 是 n 维线性空间, $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $\mathscr{X}$ 的一组基, 由 Hahn-Banach 定理的推论知, 存在 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathscr{X}^*$, 使得对任意的 $1 \leqslant i, j \leqslant n$, 有

$$f_i(e_j) = \delta_{ij},$$

且 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是 $\mathscr{X}^*$ 的一组基. 假设线性算子 $A : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 在 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_2$ 下, 可以表示为

$$A(e_1, e_2, \cdots, e_n) = (e_1, e_2, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

也即 $Ae_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}e_k, \forall 1 \leqslant j \leqslant n$. 定义 $A' : \mathscr{X}^* \to \mathscr{X}^*$, 在基 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 上有

$$(A'f_i)(e_j) = f_i(Ae_j) = f_i\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k\right) = a_{ij}.$$

从而

$$A'f_j = \sum_{i=1}^{n}(A'f_j)(e_i)f_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}f_i,$$

可以将上式写成

$$A'(f_1, f_2, \cdots, f_n) = (f_1, f_2, \cdots, f_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

并且发现上面的矩阵发生了转置. 为了将转置推广到一般的线性算子上, 我们有如下定义.

定义 3.3.1. 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是线性赋范空间, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. 对任意的 $y^* \in \mathscr{Y}^*$ 及对任意的 $x \in \mathscr{X}$, 定义 $A' : \mathscr{Y}^* \to \mathscr{X}^*$ 为

$$(A'y^*)(x) = y^*(Ax),$$

则 A' 是线性算子, 称 A' 为 A 的 **Banach 共轭算子**.

定理 3.3.1. 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y},\mathscr{Z}$ 是线性赋范空间, 则

(1) 对任意的 $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $A,B \in \mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 有 $(\alpha A+\beta B)' = \alpha A' + \beta B'$;

(2) 设 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 则 $A' \in \mathcal{L}(\mathscr{Y}^*,\mathscr{X}^*)$, 且 $\|A'\| = \|A\|$;

(3) $(\mathrm{Id}_{\mathscr{X}})' = \mathrm{Id}_{\mathscr{X}^*}$;

(4) 设 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y}), B \in \mathcal{L}(\mathscr{Y},\mathscr{Z})$, 则 $(BA)' = A'B'$;

(5) 设 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 有界可逆, 则 A' 也有界可逆, 且 $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;

(6) 设 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 则 A'' 是 A 的延拓或扩张, 也即对任意的 $x \in \mathscr{X}$, 有 $A''(\tau(x)) = \tau_1(Ax)$, 其中 $\tau : x \to x^{**}$, $\tau_1 : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}^{**}$ 是典型映射.

证明. 节选部分进行证明.

(2) 计算得

$$\begin{aligned}\|A'\| &= \sup_{\|y^*\|\leqslant 1} \|A'y^*\| = \sup_{\|y^*\|\leqslant 1}\sup_{\|x\|\leqslant 1} |(A'y^*)(x)| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\sup_{\|y^*\|\leqslant 1} |y^*(Ax)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\| = \|A\|.\end{aligned}$$

在这里用到了 $\|x\| = \sup\limits_{\|f\|\leqslant 1} |f(x)|$.

(3) 对任意的 $x^* \in \mathscr{X}^*, x \in \mathscr{X}$, 有

$$(\mathrm{Id}'_{\mathscr{X}}x^*)(x) = x^*(\mathrm{Id}_{\mathscr{X}}x) = x^*(x),$$

因此

$$\mathrm{Id}'_{\mathscr{X}}x^* = x^* = \mathrm{Id}_{\mathscr{X}^*}x^*, \quad \forall x \in \mathscr{X}^*.$$

这便说明了 $(\mathrm{Id}_{\mathscr{X}})' = \mathrm{Id}_{\mathscr{X}^*}$.

(4) 对任意的 $z^* \in Z^*, x \in \mathscr{X}$, 有

$$[(BA)'(z^*)](x) = z^*(BAx) = B'z^*(Ax) = (A'B'z^*)(x),$$

因此 $(BA)' = A'B'$.

(5) A 有界可逆 $\iff$ 存在 $A^{-1}\in\mathcal{L}(\mathscr{Y},\mathscr{X})$, 使得

$$\begin{cases} AA^{-1}=\mathrm{Id}_{\mathscr{Y}}, \\ A^{-1}A=\mathrm{Id}_{\mathscr{X}}. \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} (AA^{-1})'=(A^{-1})'A'=(\mathrm{Id}_{\mathscr{Y}})'=\mathrm{Id}_{\mathscr{Y}^*}, \\ (A^{-1}A)'=A'(A^{-1})'=(\mathrm{Id}_{\mathscr{X}})'=\mathrm{Id}_{\mathscr{X}^*}, \end{cases}$$

□

3.4 有界线性算子的谱

定义 3.4.1. 设 $\mathscr{X}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 Banach 空间, $A\in\mathcal{L}(\mathscr{X})$, 称

$$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\lambda I-A\text{是一一到上的}\}$$

为 A 的**预解集**或**正则集**. 称 $\lambda\in\rho(A)$ 为 A 的**正则点**. 称 $(\lambda I-A)^{-1}$ 为 A 的**预解式**, 记为 $R(\lambda,A)$. [a] 称 $\sigma(A)=\mathbb{C}\setminus\rho(A)$ 为 A 的**谱集**. 如果存在 $x\in\mathscr{X}\setminus\{0\}$, 使得 $(\lambda I-A)x=0$, 也即 $Ax=\lambda x$, 称 λ 是 A 的**特征值**, x 称为对应于 λ 的**特征向量**. 称 A 的所有特征值所构成的集合为 A 的**点谱**, 记为 $\sigma_p(A)$. [b] 若 $\overline{R(\lambda I-A)}=\mathscr{X}$, 称 λ 是 A 的**连续谱点**. 若 $\overline{R(\lambda I-A)}\neq\mathscr{X}$, 称 λ 是 A 的**剩余谱点**. 连续谱集记为 $\sigma_c(A)$, 剩余谱集记为 $\sigma_r(A)$.

[a] 若对任意的 $y\in\mathscr{X}$, $(\lambda I-A)x=y$ 存在唯一解 $x\in\mathscr{X}$, 则 $\lambda\in\rho(A)$ 且 $x=R(\lambda,A)y$.
[b] 如果 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\sigma_p(A)$, 则 $\lambda I-A$ 是单射, 但不是满射, 也即 $R(\lambda I-A)\neq\mathscr{X}$.

从而, 我们将 $\mathbb{C}$ 分成了: $\mathbb{C}=\rho(A)\cup\sigma(A)=\rho(A)\cup\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_r(A)$.

$$\lambda I-A\begin{cases} \text{不单}:\lambda\in\sigma_p(A), \\ \text{单}:\begin{cases} \text{满}:\lambda\in\rho(A), \\ \text{不满}:\begin{cases} R(\lambda I-A)\ \text{稠}:\lambda\in\sigma_c(A), \\ R(\lambda I-A)\ \text{不稠}:\ \lambda\in\sigma_r(A). \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

• **例 29.** $\mathscr{X}=\{x\in C^2([0,1])|x(0)=x(1),x'(0)=x'(1)\}$, $A=-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$, 求 $\sigma_p(A)$.

解. 根据

$$\begin{cases}-x''=\lambda x,\\ x(0)=x(1),\\ x'(0)=x'(1),\end{cases}$$

可以得到 $\lambda>0$, 以及 $x(t)=c_1\cos\sqrt{\lambda}t+c_2\sin\sqrt{\lambda}t=\{\sin(2n\pi t),\cos(2n\pi t)\}$, 从而 $\sigma_p(A)=\{(2n\pi)^2\}_{n\geqslant 0}$. ■

• **例 30.** $\mathscr{X}=C^2([0,1])$, $A:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$, $(Ax)(t)=tx(t)$, 求 $\rho(A)$, $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$.

解. 首先设

$$(\lambda I-A)x(t)=(\lambda-t)x(t)=y,$$

对任意的 $\lambda\notin[0,1]$, $\dfrac{1}{\lambda-t}$ 存在且有界, 因此对任意的 $y\in\mathscr{X}$, $x(t)=\dfrac{y(t)}{\lambda-t}\in\mathscr{X}$ 是使得 $(\lambda I-A)x=y$ 成立的唯一解, 此即说明 $[0,1]^C\subset\rho(A)$.

接下来, 如果 $(\lambda I-A)x=0$, 也即 $(\lambda-t)x(t)=0$, 由 $x\in C([0,1])$ 知 $x=0$, 故对任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda I-A$ 是单射, 从而 $\sigma_p(A)=\varnothing$.

对任意的 $\lambda\in[0,1]$, 如果存在 $x\in\mathscr{X}$, 使得

$$(\lambda I-A)x=y\iff(\lambda-t)x(t)=y(t),$$

则 $y(\lambda)=0$, 从而 $1\notin R(\lambda I-A)$, 从而 $R(\lambda I-A)\neq X$, 这便说明了如果 $\lambda\in[0,1]$, 则 $\lambda\notin\rho(A)$, 从而 $\rho(A)=[0,1]^C$.

根据上面的过程知 $1\in\mathscr{X}$ 但是 $1\notin\overline{R(\lambda I-A)}$, 因此 $\overline{R(\lambda I-A)}\neq\mathscr{X}$, 故 $\sigma_c(A)=\varnothing$, $\sigma_r(A)=[0,1]$. ■

• **例 31.** 设 $\mathscr{X}$ 是 n 维线性赋范空间, $A\in\mathcal{L}(\mathscr{X})$, 则 $\sigma(A)=\sigma_p(A)$.

证明. 根据 $\sigma_p(A)\subset\sigma(A)$ 知, 只要证明 $\sigma(A)\subset\sigma_p(A)$, 或 $\sigma_c(A)+\sigma_r(A)=\varnothing$. 任取 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\sigma_p(A)$, 则 $\lambda I-A$ 是单射, 接下来说明它还是满射: 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 $\mathscr{X}$ 的一

组基, 则 $(\lambda I-A)e_1,(\lambda I-A)e_2,\cdots,(\lambda I-A)e_n$ 是 $R(\lambda I-A)$ 的一组基, 且它们是线性无关的, 从而 $\dim R(\lambda I-A)=n$, 又 $R(\lambda I-A)\subset\mathscr{X}$, 故 $R(\lambda I-A)=\mathscr{X}$, 此即说明 $\lambda I-A$ 是满射. 从而 $\lambda\in\rho(A)$, 此即说明 $\sigma_p(A)=\sigma(A)$. □

定理 3.4.1. *设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, $A\in\mathcal{L}(\mathscr{X})$ 且 $\|A\|<1$, 则 $(I-A)$ 是有界可逆的且 $\|(I-A)^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{1-\|A\|}$.*

证明. 只需证明: 对任意的 $y\in\mathscr{X}$, 存在唯一的 $x\in\mathscr{X}$, 使得 $(I-A)x=y\iff x=Ax+y$. 令 $Sx=Ax+y$, 则对任意的 $x_1,x_2\in\mathscr{X}$, 有

$$\|Sx_1-Sx_2\|=\|Ax_1-Ax_2\|\leqslant\|A\|\cdot\|x_1-x_2\|,$$

故 S 是 $\mathscr{X}$ 上的严格压缩映射, 由 Banach 压缩映像原理知, 存在唯一的 $x\in\mathscr{X}$, 使得 $Sx=x=Ax+y$, 即 $x-Ax=y$, 从而 $I-A$ 是一一到上的, 由 Banach 逆算子定理知 $I-A$ 是有界可逆的, 且 $x=(I-A)^{-1}y$. 接下来, 根据

$$\|x\|=\|Ax+y\|\leqslant\|Ax\|+\|y\|\leqslant\|A\|\|x\|+\|y\|,$$

得

$$\|(I-A)^{-1}y\|=\|x\|\leqslant\frac{\|y\|}{1-\|A\|},\quad\forall y\in\mathscr{X},$$

对上式左边取上确界即可得 $\|(I-A)^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{1-\|A\|}$. □

定理 3.4.2. *设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, $A\in\mathcal{L}(\mathscr{X})$, 则*

(1) $\rho(A)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的非空开集, $\sigma(A)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的闭集;

(2) A^{-1} 是 A 的连续函数;

(3) $\mathcal{L}(\mathscr{X})$ 中所有有界可逆算子所构成的集合是 $\mathcal{L}(\mathscr{X})$ 中的开集.

推论 3.4.1. 设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, $A\in\mathcal{L}(\mathscr{X})$, 如果 $|\lambda|>\|A\|$, 则 $\lambda I-A$ 是有界可逆的, 也即 $\lambda\in\rho(A)$.

证明. 只需注意到 $(\lambda I-A)=\lambda\cdot\left(I-\dfrac{A}{\lambda}\right)$, 其中 $\left\|\dfrac{A}{\lambda}\right\|<1$. □

引理 3.4.1. 设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X})$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ 存在且等于 $\inf\limits_{n\geqslant 1} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. 记上式为 $r(A)$.

证明. 由 $\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \geqslant 0$ 知 $\inf\limits_{n\geqslant 1} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ 存在, 下面只需证明

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r(A).$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 \geqslant 1$, 使得

$$\|A^{n_0}\| \leqslant (r(A)+\varepsilon)^n.$$

又根据带余除法, 对任意的 $n \geqslant n_0$, 存在 $p \geqslant 1$, $r \in [0, n_0)$, 使得 $n = pn_0 + r$, 从而

$$\|A^n\| = \|A^{pn_0+r}\| \leqslant \|A^{n_0}\|^p \cdot \|A^r\| \leqslant (r(A)+\varepsilon)^{pn_0} \cdot \|A^r\|.$$

从而

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant (r(A)+\varepsilon)^{\frac{pn_0}{n}} \cdot \|A^r\|^{\frac{1}{n}},$$

对上式取上极限得

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r(A)+\varepsilon,$$

由 ε 的任意性得 $\limsup\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r(A)$. □

定理 3.4.3. $\mathscr{X}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 *Banach* 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X})$. 则当

$$|\lambda| > r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

时, $\lambda \in \rho(A)$ 且 $(\lambda I - A)^{-1} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{A^j}{\lambda^{j+1}}$. 其中 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{A^{j+1}}{\lambda^{j+1}}$ 为有界线性算子 $S_m = \sum\limits_{j=0}^{m} \dfrac{A^j}{\lambda^{j+1}}$ 按照算子范数定义的极限.

证明. (1) 证明 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{A^j}{\lambda^{j+1}} \in \mathcal{L}(\mathscr{X})$.

根据我们之前的结论, 当 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间时, $\mathcal{L}(\mathscr{X})$ 也为 Banach 空间. 从而要证明 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{A^j}{\lambda^{j+1}}$ 在 $\mathcal{L}(\mathscr{X})$ 中收敛, 只需要证明 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{A^j}{\lambda^{j+1}}$ 绝对收敛, 即证 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \left\|\dfrac{A^j}{\lambda^{j+1}}\right\|$ 收敛.

令 $\varepsilon_0 = |\lambda| - r(A) > 0$, 则根据 $r(A)$ 的定义知, 存在 $n_0 \geqslant 1$, 使得当 $n \geqslant n_0$ 时,

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} < r(A) + \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \text{i.e.} \quad \left|\|A^n\|^{\frac{1}{n}} - r(A)\right| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\left\|\frac{A^j}{\lambda^{j+1}}\right\| &= \sum_{j=0}^{n_0-1}\left\|\frac{A^j}{\lambda^{j+1}}\right\| + \sum_{j=n_0}^{\infty}\left\|\frac{A^j}{\lambda^{j+1}}\right\| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{n_0-1}\left\|\frac{A^j}{\lambda^{j+1}}\right\| + \sum_{j=n_0}^{\infty}\frac{\left(r(A)+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^j}{(r(A)+\varepsilon_0)^{j+1}} < \infty.\end{aligned}$$

上式中最后一个小于号的原因是第一项为有限项求和, 而第二项为公比小于 1 的等比级数. 因此 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{\lambda^{j+1}}$ 在 $\mathcal{L}(\mathscr{X})$ 中收敛. 从而存在 $B \in \mathcal{L}(\mathscr{X})$, 使得 $B = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{\lambda^{j+1}}$.

(2) 证明 $(\lambda I - A)B = B(\lambda I - A) = I$.

一方面,

$$(\lambda I - A)B = (\lambda I - A)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{\lambda^{j+1}} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{\lambda^j} - \sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^{j+1}}{\lambda^{j+1}} = I;$$

类似地, 可以证明 $B(\lambda I - A) = I$. 从而综合两方面,

$$(\lambda I - A)^{-1} = B = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{\lambda^{j+1}}.$$

□

推论 3.4.2. 设 $\mathscr{X}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X})$, 则 $\sigma(A)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的有界闭集, 且

$$\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda| = \max_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda| \leqslant r(A),$$

并称 $\sup\limits_{\lambda\in r(A)}$ 为 A 的**谱半径**.

定理 3.4.4. 设 $\mathscr{X}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 *Banach* 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X})$. 对任意的 $\lambda_0 \in \rho(A)$, 记

$$r_{\lambda_0} = \lim_{n\to\infty}\|(\lambda_0 I - A)^{-n}\|^{\frac{1}{n}}.$$

则当 $\|\lambda-\lambda_0\| \leqslant r_{\lambda_0}^{-1}$ 时, $\lambda \in \rho(A)$ 且

$$(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(\lambda-\lambda_0)^j(\lambda_0 I-A)^{-(j+1)}.$$

其中 $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(\lambda-\lambda_0)^j(\lambda_0 I-A)^{-(j+1)}$ 为按照算子范数定义的极限.

证明. 注意到

$$\lambda I-A=(\lambda-\lambda_0)I+(\lambda_0 I-A)=(\lambda_0 I-A)[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}].$$

则令 $B=-(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}$ 时, 有 $\lambda I-A=(\lambda_0 I-A)(I-B)$. 而 $\lambda \in \rho(A) \iff 1 \in \rho(B)$, 从而

$$\begin{aligned}
r(B)=\lim_{n\to\infty}\|B^n\|^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\left\|(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n(\lambda_0 I-A)^{-n}\right\|^{\frac{1}{n}}\\
&=|\lambda-\lambda_0|\lim_{n\to\infty}\left\|(\lambda_0 I-A)^{-n}\right\|^{\frac{1}{n}}\\
&=|\lambda-\lambda_0|\cdot r_{\lambda_0}<1.
\end{aligned}$$

从而由定理 (3.4.3) 知, $1 \in \rho(B)$ 且

$$(I-B)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}B^j=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(\lambda-\lambda_0)^j(\lambda_0 I-A)^{-j}.$$

从而

$$\begin{aligned}
(\lambda I-A)^{-1}=(I-B)^{-1}(\lambda_0 I-A)^{-1} &= \sum_{j=0}^{\infty}(I-B)^{-1}(\lambda_0 I-A)^{-1}\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(\lambda-\lambda_0)^j(\lambda_0 I-A)^{-(j+1)}.
\end{aligned}$$ □

定理 3.4.5. 设 $\mathscr{X}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 *Banach* 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X})$. 则对任意的 $f \in (\mathcal{L}(\mathscr{X}))^*$, 有 $f\left((\lambda I-A)^{-1}\right)$ 关于 λ 在 $\rho(A)$ 上解析[a].

[a] 根据我们在复分析中所学内容, 函数在某个区域内解析当且仅当其在该区域内任一邻域内可以展开成 Taylor 级数的形式.

证明. 根据定理 (3.4.4) 的结论, $\forall\lambda_0 \in \rho(A)$, 存在 $r_{\lambda_0} = \lim\limits_{n\to\infty} \|(\lambda_0 I - A)^{-n}\|^{\frac{1}{n}}$, 使得当 $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{r_{\lambda_0}}$ 时, 有 $\lambda \in \rho(A)$ 且

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\lambda - \lambda_0)^j (\lambda_0 I - A)^{-(j+1)}.$$

令 $S_m = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j (\lambda - \lambda_0)^j (\lambda_0 I - A)^{-(j+1)}$. 从而任取 $f \in ((\lambda I - A)^{-1})^*$,

$$\begin{aligned} f((\lambda I - A)^{-1}) = f\left(\lim_{m\to\infty} S_m\right) &= \lim_{m\to\infty} f(S_m) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j (\lambda - \lambda_0)^j f\left((\lambda_0 I - A)^{-(j+1)}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\lambda - \lambda_0)^{-(j+1)}. \end{aligned}$$

由 λ_0 的任意性知, $f((\lambda I - A)^{-1})$ 关于 λ 在 $\rho(A)$ 上解析. □

定理 3.4.6. 设 $\mathscr{X}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 *Banach* 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X})$, 则 $\sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| = r(A)$.

证明. 由于 $r(A) \geqslant \sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$ 是显然的, 因此我们只需证明 $a = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| \geqslant r(A)$.

$\forall\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $|\lambda| > r(A)$, 有 $\lambda \in \rho(A)$ 且 $(\lambda I - A)^{-1} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{A^j}{\lambda^{j+1}}$. 从而 $\forall f \in (\mathcal{L}(\mathscr{X}))^*$, 有 $f\left((\lambda I - A)^{-1}\right) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{f(A^j)}{\lambda^{j+1}}$. 则 $a = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$, 故 $\forall\varepsilon > 0$, 有 $a + \varepsilon \in \rho(A)$. 因此 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{f(A^j)}{\lambda^{j+1}}$ 收敛. 从而 $\forall f \in (\mathcal{L}(\mathscr{X}))^*$, 存在 $M_f > 0$, 使得

$$\left|\frac{f(A^j)}{(a+\varepsilon)^{j+1}}\right| \leqslant M_f, \quad \forall j \geqslant 0.$$

由共鸣定理 (3.2.8) 知, 存在 $M > 0$, 使得 $\forall j \geqslant 1$, 有

$$\left\|\frac{A^j}{(a+\varepsilon)^{j+1}}\right\| \leqslant M.$$

因此有 $\|A^j\| \leqslant M \cdot (a+\varepsilon)^{j+1}$, 即

$$\|A^j\|^{\frac{1}{j}} \leqslant (M(a+\varepsilon))^{\frac{1}{j}} (a+\varepsilon).$$

令 $j \to \infty$, 则有 $r(A) \leqslant a + \varepsilon$, 再令 $\varepsilon \to 0$, 即有 $r(A) \leqslant a$. □

- **例 32.** 设 $\mathscr{X}=C([0,1])$, 令 $Ax(t)=\displaystyle\int_0^t x(s)\mathrm{d}s$. 求 $r(A)$.

解. 根据我们熟知的结论,

$$|A^n x(t)|\leqslant \frac{t^n}{n!}\|x\|.$$

特别地, 当 $t=1$ 时, $|A^n x(t)|\leqslant \dfrac{\|x\|}{n!}$, 因此有 $\|A^n\|\leqslant \dfrac{1}{n!}$. 再结合 $n!\geqslant n^{\frac{n}{2}}$, 则有 $\|A^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, 因此 $r(A)=0$. ■

在上述例题中, 我们还能进一步地得到, 由于 $1\notin\overline{R(A)}$, 因此 $0\notin\sigma_c(A)$; 当 $Ax(t)=\lambda x(t)$ 时, 有 $\lambda=0$, 从而 $0\notin\sigma_p(A)$. 因此可以确定 $0\in\sigma_r(A)$.

定理 3.4.7. 设 $\mathscr{X}\neq\{0\}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 *Banach* 空间, $A\in\mathcal{L}(\mathscr{X})$, 则 $\sigma(A)\neq\varnothing$.

证明. 若 $\sigma(A)=\varnothing$, 则 $r(A)=0$ 且 $\sigma(A)=\mathbb{C}$. 从而 $\forall\lambda\neq 0$, 有 $\lambda\in\rho(A)$ 且

$$(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f(A^j)}{\lambda^{j+1}}.$$

特别地, 当 $|\lambda|>\|A\|$ 时, 有

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|=\left\|\lambda^{-1}\left(I-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1}\right\|=\frac{1}{|\lambda|}\left\|\left(I-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1}\right\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{1-\|\frac{A}{\lambda}\|}=\frac{1}{|\lambda|-\|A\|}.$$

从而 $\forall f\in(\mathcal{L}(\mathscr{X}))^*$, 当 $|\lambda|>\|A\|$ 时,

$$\left|f\left((\lambda I-A)^{-1}\right)\right|\leqslant\|f\|\cdot\left\|(\lambda I-A)^{-1}\right\|\leqslant\frac{\|f\|}{|\lambda|-\|A\|}.$$

因此当 $|\lambda|\to\infty$ 时, $f((\lambda I-A)^{-1})\to 0$. 又由于 $f((\lambda I-A)^{-1})$ 在 $\rho(A)=\mathbb{C}$ 上解析, 因此根据 Liouville 定理[3],

$$f((\lambda I-A)^{-1})\equiv 0,\quad \forall f\in(\mathcal{L}(\mathscr{X}))^*.$$

从而

$$f((\lambda I-A)^{-1})=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f(A^j)}{\lambda^{j+1}}=\frac{f(I)}{\lambda}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f(A^j)}{\lambda^{j+1}}.$$

由 Hahn-Banach 定理的推论, 存在 $f_0\in(\mathcal{L}(\mathscr{X}))^*$, 使得 $f_0(I)\neq 0$. 因此 $f_0((\lambda I-A)^{-1})\neq 0$, 这与假设矛盾. 因此 $\sigma(A)\neq\varnothing$. □

[3]根据我们复分析中所学知识, Liouville 定理是指, 有界的整函数必为常函数.

定理 3.4.8. 设 $\mathscr{X}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 *Banach* 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X})$, A' 为 A 的 *Banach* 共轭算子, 则 $\sigma(A) = \sigma(A')$, $\rho(A) = \rho(A')$, 且当 $\lambda \in \rho(A)$ 时, 有

$$\left[(\lambda I - A)^{-1}\right]' = (\lambda I - A')^{-1}.$$

证明. $\forall \lambda \in \rho(A)$, 则根据定义, $(\lambda I - A)$ 为有界可逆的. 从而

$$(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A) = (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} = I.$$

同时求两边的 Banach 共轭算子, 得

$$\begin{aligned} &(\lambda I - A)'\left[(\lambda I - A)^{-1}\right]' = \left[(\lambda I - A)^{-1}\right]'(\lambda I - A)' = I_{\mathscr{X}^*}. \\ \Longrightarrow \quad &(\lambda I_{\mathscr{X}^*} - A)'\left[(\lambda I - A)^{-1}\right]' = \left[(\lambda I - A)^{-1}\right]'(\lambda I_{\mathscr{X}^*} - A)' = I_{\mathscr{X}^*}. \end{aligned}$$

由于 $[(\lambda I - A)^{-1}]' \in \mathcal{L}(\mathscr{X}^*)$, $\lambda \in \rho(A')$ 且 $(\lambda I_{\mathscr{X}^*} - A)^{-1} = [(\lambda I - A)^{-1}]'$, 从而 $\rho(A) \subset \rho(A')$.

下面证明 $\rho(A') \subset \rho(A)$. $\forall \lambda \in \rho(A')$, 根据已经证明的结论, 我们知道 $\lambda \in \rho(A'')$, 从而 $N(\lambda I_{\mathscr{X}^*} - A^{**}) = \{0\}$. 从而如果 $x \in \mathscr{X}$ 使得 $\lambda x - Ax = 0$, 则有 $\tau(\lambda I - Ax) = 0$.

$\forall y^* \in \mathscr{X}^*$,

$$\begin{aligned} \tau(\lambda x - Ax)(y^*) &= y^*(\lambda x - Ax) = \lambda I' y^*(x) - (A'y^*)(x) \\ &= \lambda y^*(x) - A'y^*(x) = \lambda\tau(x)(y^*) - \tau(x)(A'y^*) \\ &= \lambda I'\tau(x)(y^*) - A''\tau(x)(y^{**}). \end{aligned}$$

从而 $\forall y^* \in \mathscr{X}^*$, $\tau(Ax)(y^*) = [A''(\tau(x))](y^*)$, 由此可以推出 $\tau(Ax) = A''\tau(x)$. 而当

$$0 = \tau(\lambda x - Ax) = \lambda\tau(x) - \tau(Ax) = \lambda\tau(x) - A''\tau(x) = (\lambda I_{\mathscr{X}^{**}} - A^{**})\tau(x)$$

时, 有且仅有 $\tau(x) = 0$, 从而 $x = 0$. 因此 $(\lambda I - A)$ 是一一的.

下面证明 $(\lambda I - A)$ 是映上的, 即证明对于 $y \in \overline{R(A)}$, $\forall f \in N(A')$, 都有 $f(y) = 0$.

取 $\lambda \in \rho(A')$, 则 $N(\lambda I - A') = \{0\}$. 结合 $\forall f \in N(A)$ 有 $f(y) = 0$ 知, $\overline{R(\lambda I - A)} = \mathscr{X}$. 从而 $\forall y \in \mathscr{X}$, $\exists x_n \in \mathscr{X}$, 使得

$$\lambda x_n - Ax_n \to y, \quad (n \to \infty). \tag{3.1}$$

因此 $\{\lambda x_n - Ax_n\}$ 为 $\mathscr{X}$ 中的 Cauchy 列, 从而 $\{\tau\lambda x_n - Ax_n\}$ 为 $\mathscr{X}^{**}$ 中的 Cauchy 列, 进而 $\{\tau(x_n)\}$ 为 $\mathscr{X}^{**}$ 中的 Cauchy 列.

对于 $\lambda \in \rho(A'')$, $(\lambda I - A'')^{-1}$ 有界, 从而

$$\begin{aligned}\|\tau(x_n) - \tau(x_m)\| &= \|(\lambda I - A'')^{-1}(\lambda I - A'')(\tau(x_n) - \tau(x_m))\| \\ &\leqslant \|(\lambda I - A'')^{-1}\| \cdot \|(\lambda I - A'')(\tau(x_n)) - (\lambda I - A'')(\tau(x_m))\|.\end{aligned}$$

因此 $\{x_n\}$ 为 $\mathscr{X}$ 中的 Cauchy 列. 而 $\mathscr{X}$ 完备, 从而存在 $x_0 \in \mathscr{X}$, 使得 $x_n \to x_0$. 因此 $\lambda x_n - Ax_n \to \lambda x_0 - Ax_0$. 结合 (3.1) 的极限关系, 可以得到

$$y = \lambda x_0 - Ax_0.$$

因此有 $R(\lambda I - A) = \mathscr{X}$. 故 $(\lambda I - A)$ 是到上的. 于是有 $\lambda \in \rho(A)$. 定理得证. □

3.5　紧算子的基本性质

定义 3.5.1. 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的线性赋范空间, $A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是线性算子. 如果 A 将 $\mathscr{X}$ 中的有界集映成 $\mathscr{Y}$ 中的列紧集, 则称 A 为**紧算子**. 记从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的所有紧算子的全体为 $\mathcal{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

注.　(1) 关于上述定义的紧算子, 有如下等价定义: 若 A 将 $\mathscr{X}$ 中的单位球映成 $\mathscr{Y}$ 中的列紧集, 则 A 为紧算子; 或对于 $\mathscr{X}$ 中任意的有界点列 $\{x_n\}$, 有 $\{Ax_n\}$ 在 $\mathscr{Y}$ 中列紧.

(2) 如果 $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 则 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. 从而有 $\mathcal{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \subset \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

• **例 33.** 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, K 为 $\Omega \times \Omega$ 上的连续函数. 定义 $A : C(\Omega) \to C(\Omega)$:

$$(Au)(x) = \int_\Omega K(x, y)u(y)\mathrm{d}y, \quad \forall u \in C(\Omega).$$

则 A 为紧算子.

• **例 34.** 设 $\mathscr{X} = \ell^2$, 则 $\mathscr{X}$ 上的单位算子 $A = I$ 非紧算子.

证明. 设

$$\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \cdots, 0, \overset{\substack{\text{第 } n \text{ 位} \\ \downarrow}}{1}, 0, \cdots), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

从而对于 $m \neq n$, $\|\boldsymbol{e}_m - \boldsymbol{e}_n\| = \sqrt{2}$. 因此 $\{x_n\}$ 无收敛子列, 故 A 非紧算子. □

另证. 设 $\mathscr{X}$ 中单位球为 $B(0,1)$, 则 $IB(0,1) = B(0,1)$. 根据 Riesz 引理的推论 (2.2.8), 由于 ℓ^2 是无穷维的, 因此其中的单位球 $B(0,1)$ 不是列紧的. 故 A 不为紧算子. □

根据上述例题我们可以得出, 无穷维线性赋范空间中的单位算子非紧算子.

此外, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$A, B \in \mathcal{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \quad \Longrightarrow \quad \alpha A + \beta B \in \mathcal{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}).$$

从而有 $\mathcal{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 为 $\mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 的线性子空间.

定理 3.5.1. *设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间, $\mathscr{Y}$ 为 Banach 空间. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 且 $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})} \to 0$, 则 $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 从而 $\mathcal{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是 $\mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 中的闭线性子空间.*

证明. 根据定义, 由于 $A_n \in \mathcal{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 则对任意的 $\mathscr{X}$ 中有界集 B, $A_n(B)$ 在 $\mathscr{Y}$ 中列紧. 又 $\mathscr{Y}$ 为 Banach 空间, 因此 $A_n(B)$ 在 $\mathscr{Y}$ 中完全有界. 从而 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $A_n(B)$ 的有限 $\frac{\varepsilon}{3}$-网, 记作 $A_n x_1, A_n x_2, \cdots, A_n x_{m(n)}$, 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_{m(n)} \in B$. 从而 $\forall x \in B$, 存在 $1 \leqslant k(n) \leqslant m(n)$, 使得

$$\|A_n x - A_n x_{k(n)}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

另一方面, 设 B 有上界 L, 从而对于上述 ε, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$\|A_{n_0} - A\|_{\mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathcal{Y})} < \frac{\varepsilon}{3L}.$$

因此, $\forall x \in B$, $\forall A \in \mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 取 $x_i = x_{k(n)}$, 则有

$$\begin{aligned}\|Ax - Ax_i\| &\leqslant \|Ax - A_{n_0}x\| + \|A_{n_0}x - A_{n_0}x_i\| + \|A_{n_0}x_i - Ax_i\| \\ &\leqslant \|A_{n_0} - A\|_{\mathcal{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})} \cdot \|x + x_i\| + \|A_{n_0}x - A_{n_0}x_i\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3L} \cdot 2L + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

故 $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. 定理得证. □

定义 3.5.2. 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 为线性赋范空间, $A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是线性算子. 如果 $R(A)$ 是有限维的, 则称 A 是**有限秩算子**.

根据之前的结论显然有, 如果 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是有限秩算子, 则 $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

- **例 35.** 设 $\mathscr{X} = \ell^2$, $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in \mathscr{X}$, 定义 $T : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 为

$$T\boldsymbol{x} = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots\right).$$

则 $T \in \mathcal{C}(\mathscr{X})$.

定义 3.5.3. 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是线性赋范空间, 称 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是全连续的, 如果 A 将 $\mathscr{X}$ 中弱收敛的点列映为 $\mathscr{Y}$ 中强收敛的点列. 即如果 $x_n \rightharpoonup x$, 则 $Ax_n \to Ax$.

在这里指出, 如果 $x_n \rightharpoonup x$, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 则 $Ax_n \rightharpoonup Ax$. 这是因为

$$y^*(Ax_n) = (A'y^*)(x_n) \to (A'y^*)(x) = y^*(Ax),$$

其中 $A' \in \mathcal{L}(\mathscr{Y}^*, \mathscr{X}^*)$, $A'y^* \in \mathscr{X}^*$.

定理 3.5.2. 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是线性赋范空间, $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 则 A 是全连续的. 如果 $\mathscr{X}$ 是自反的, 反之也成立.

证明. 设 $x_n \rightharpoonup x$, 下证 $Ax_n \to Ax$. 假设存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及 $\{Ax_{n_j}\} \subset \{Ax_n\}$, 使得

$$\|Ax_{n_j} - Ax\| \geqslant \varepsilon_0, \quad \forall j \geqslant 1.$$

由 $x_n \rightharpoonup x$ 知 $x_{n_j} \rightharpoonup x$, 从而 $\{x_{n_j}\}$ 有界[4], 由 $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 知 $\{Ax_{n_j}\}$ 有收敛的子列, 不妨仍记为 $\{Ax_{n_j}\}$. 从而存在 $y \in \mathscr{Y}$, 使得 $Ax_{n_j} \to y$, 由收敛蕴含弱收敛知 $Ax_{n_j} \rightharpoonup y$. 另外, 又有 $Ax_{n_j} \rightharpoonup Ax$, 这便说明了 $y = Ax$, 从而 $Ax_{n_j} \to Ax$, 矛盾. 于是, A 是全连续的.

反之, 设 $\{x_n\}$ 在 $\mathscr{X}$ 中有界, 要证 $\{Ax_n\}$ 存在收敛子列, 由 $\mathscr{X}$ 自反[5]知, 存在子列 $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ 及 $x_0 \in \mathscr{X}$, 使得 $x_{n_j} \rightharpoonup x_0$. 由 A 全连续知 $Ax_{n_j} \to Ax_0$, 即存在子列 $\{Ax_{n_j}\} \subset \{Ax_n\}$ 在 $\mathscr{Y}$ 中收敛, 故 $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. □

[4]弱收敛一定有界, 这是共鸣定理保证的.

[5]自反空间中的有界集为若列紧的.

定理 3.5.3. 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y},\mathscr{Z}$ 是线性赋范空间.

(1) 如果 $A\in\mathcal{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 则 $R(A)$ 是可分的;

(2) $A\in\mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, $B\in\mathcal{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 如果 A,B 中至少有一个是紧算子, 则 $BA\in\mathcal{C}(\mathscr{X},\mathscr{Z})$.

证明. (1) 表 $\mathscr{X}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B(0,n)$, $R(A)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}AB(0,n)$, 其中 $AB(0,n)$ 是列紧集, 从而是可分的, 从而 $R(A)$ 是可分的.

(2) 应用定义即可. □

推论 3.5.1. 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间且 $\mathscr{X}$ 或 $\mathscr{Y}$ 是无穷维的, $A\in\mathcal{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是单射, 则 $R(A)\neq\mathscr{Y}$.

证明. 假设 $R(A)=\mathscr{Y}$, 则由 Banach 逆算子定理知 $A^{-1}\in\mathcal{L}(\mathscr{Y},\mathscr{X})$, 则由定理 (3.5.3) 知 $AA^{-1}=I_{\mathscr{Y}}$, $A^{-1}A=I_{\mathscr{X}}$ 分别是 $\mathscr{Y}$ 和 $\mathscr{X}$ 中紧算子, 从而 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是有限维的, 矛盾. 从而 $R(A)\neq\mathscr{Y}$. □

推论 3.5.2. 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间, $A\in\mathcal{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是单射, $R(A)$ 是无穷维的, 则 $\overline{R(A)}\neq R(A)$.

证明. 假设 $\overline{R(A)}=R(A)$, 则 $R(A)$ 是 Banach 空间, 应用上述推论可得 $R(A)$ 是有限维的, 矛盾. 从而 $\overline{R(A)}\neq R(A)$. □

定理 3.5.4. 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是线性赋范空间, 如果 $A\in\mathcal{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 则 $A'\in\mathcal{C}(\mathscr{Y}^*,\mathscr{X}^*)$. 如果 $\mathscr{Y}$ 是 *Banach* 空间, 反之也成立.

证明. $A'\in\mathcal{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\iff$ 对任意的 $\mathscr{Y}^*$ 中的有界集 M^*, $A'M^*$ 在 $\mathscr{X}^*$ 中列紧. 设存在 $L>0$, 使得 $\|y^*\|\leqslant L(\forall y\in M^*)$, 要证 $A'M^*$ 是完全有界的, 也即存在 $y_1^*,y_2^*,\cdots,y_n^*\in M^*$, 使得对任意的 $y^*\in M^*$, 存在 $1\leqslant i\leqslant n$, 使得

$$\|A'y^*-A'y_i^*\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|(A'y^*)(x)-(A'y_i^*)(x)|<\varepsilon.$$

上式等价于对任意的 $x\in B(0,1)$, 都有

$$|y^*(Ax)-y_i^*(Ax)|<\varepsilon.$$

由 $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 知 $AB(0,1)$ 是列紧的, 从而也是完全有界的. 对上述 $\varepsilon > 0$, $AB(0,1)$ 存在有限 $\dfrac{\varepsilon}{3L}$-网 $\{Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_m\}$. 于是, 对任意的 $x \in B(0,1)$, 存在 $1 \leqslant j \leqslant m$, 使得

$$\|Ax - Ax_j\| < \frac{\varepsilon}{3L},$$

从而对任意的 $x \in B(0,1)$, 都有

$$\begin{aligned}|y^*(Ax) - y_i^*(Ax)| &\leqslant |y^*(Ax) - y^*(Ax_j)| + |y^*(Ax_j) - y_i^*(Ax_j)| + |y_i^*(Ax_j) - y_i^*(Ax)| \\ &\leqslant |y^*(Ax_j) - y_i^*(Ax_j)| + (\|y^*\| + \|y_i^*\|) \cdot \|Ax_j - Ax\| \\ &\leqslant |y^*(Ax_j) - y_i^*(Ax_j)| + \frac{2\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

从而只需证明对任意的 $1 \leqslant j \leqslant m$, 都有

$$|y^*(Ax_j) - y_i^*(Ax_j)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $\mathscr{Y}_n = \operatorname{span}\{Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_m\}$, 则 $\mathscr{Y}_n^*$ 是有限维的. 令 $M_n^* = \left\{y^*|_{\mathscr{Y}_n} : y^* \in M^*\right\}$, 则对任意的 $y^* \in M^*$, 都有 $\left\|y^*|_{\mathscr{Y}_n}\right\|_{\mathscr{Y}_n^*} \leqslant \|y^*\|_{\mathscr{Y}^*} \leqslant L$, 此即说明 M_n^* 是 $\mathscr{Y}_n^*$ 中的有界集. 从而, 存在 M_n^* 在 Y_n^* 中的 $\dfrac{\varepsilon}{3(1+\|A\|)}$-网 $\{y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*\} \subset M^*$, 使得对任意的 $y^* \in M$, 有

$$\left\|y^*|_{\mathscr{Y}_n} - y_i^*|_{\mathscr{Y}_n}\right\|_{\mathscr{Y}_n^*} < \frac{\varepsilon}{3(1+\|A\|)}.$$

从而对任意的 $1 \leqslant j \leqslant m$, 有

$$\begin{aligned}|y^*(Ax_j) - y_i^*(Ax_j)| &\leqslant \left\|y^*|_{\mathscr{Y}_n} - y_i^*|_{\mathscr{Y}_n}\right\|_{\mathscr{Y}_n^*} \cdot \|Ax_j\| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3(1+\|A\|)} \cdot \|A\| \cdot \|x_j\| < \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

反之, 设 $A' \in \mathcal{C}(\mathscr{Y}^*, \mathscr{X}^*)$, 则 $A'' \in \mathcal{C}(\mathscr{X}^{**}, \mathscr{Y}^{**})$. 考虑典型映射 $\tau : \mathscr{X} \to \mathscr{X}^{**}$, $\tau_1 : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}^{**}$, 并且注意到对任意的 $x \in \mathscr{X}$, 有

$$\tau_1(Ax) = A''\tau(x).$$

设 $\{x_n\}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的有界点列, 则 $\tau_1(Ax_n) = A''\tau(x_n)$, 其中 $\{\tau(x_n)\}$ 是 $\mathscr{X}^{**}$ 中的有界点列, 由 A'' 是紧算子知存在子列 $\{A''\tau(x_{n_j})\}$ 在 $\mathscr{Y}^{**}$ 中收敛, 且 $A''\tau(x_{n_j}) = \tau_1(Ax_{n_j})$. 上述过程说明了 $\{\tau_1(Ax_{n_j})\}$ 是 $\mathscr{Y}^{**}$ 中的 Cauchy 列, 故 $\{Ax_{n_j}\}$ 是 $\mathscr{Y}$ 中的 Cauchy 列, 由 $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间知 $\{Ax_{n_j}\}$ 在 $\mathscr{Y}$ 中收敛. □

3.6 紧算子的谱理论——Riesz-Schauder 理论

设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X})$.

定理 3.6.1. 设 $\lambda \neq 0$, $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X})$, 则 $N(\lambda I - A)$ 是有限维的.

证明. 设 $B(0,1)$ 是 $N(\lambda I - A)$ 中以 0 为心, 1 为半径的球, 对任意的 $\{x_n\} \subset B(0,1)$, 由 $(\lambda I - A)x_n = 0$ 得

$$\lambda x_n = Ax_n.$$

由 $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X})$ 得存在 $\{Ax_{n_j}\}$ 及 $y \in \mathscr{X}$, 使得 $Ax_n = \lambda x_{n_j} \to y$, 又由 $\lambda \neq 0$ 得 $x_{n_j} \to \dfrac{y}{\lambda}$, 故 $B(0,1)$ 是列紧的, 此即说明 $N(\lambda I - A)$ 是有限维的. □

定理 3.6.2. 设 $\lambda \neq 0$, $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X})$. 则 $R(\lambda I - A)$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭子空间.

证明. $R(\lambda I - A)$ 是是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间是显然的, 于是我们只需要证明其是闭的.

根据我们之前的结论, 若 $A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 为有界线性算子, 且存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\alpha\|x\| \leqslant \|Ax\|, \quad \forall x \in \mathscr{X}. \tag{3.2}$$

则 A 的值域 $R(A)$ 为闭的. 事实上, 若取 $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R(A)$ 且 $Ax_n \to y$, 我们只需证明 $y \in R(A)$. 根据 (3.2) 式可知,

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|Ax_n - Ax_m\|, \quad n, m \in \mathbb{N}^*.$$

从而由 $\{Ax_n\}$ 为 Cauchy 列可得 $\{x_n\}$ 也为 Cauchy 列, 因此存在 $x_0 \in \mathscr{X}$, 使得 $x_n \to x_0$, 又 A 为有界线性算子, 因此 $Ax_n \to Ax_0$. 根据极限的唯一性, 即有 $y = Ax_0 \in R(A)$.

有了上述结论, 我们只需要构造满足 (3.2) 式类似的条件即可. 由于核空间 $N(\lambda I - A)$ 是有限维的, 因此根据定理 (2.3.5) 知, 存在 $\mathscr{X}$ 的闭子空间 $\mathscr{X}_2$, 使得

$$\mathscr{X} = N(\lambda I - A) \oplus \mathscr{X}_2.$$

定义 $T : \mathscr{X}_2 \to \mathscr{X}$ 为

$$Tx = (\lambda I - A)x, \quad \forall x \in \mathscr{X}.$$

则当 $Tx=(\lambda I-A)x=0$ 时, 有 $x\in N(\lambda I-A)\cap\mathscr{X}_2=\{0\}$, 则 T 为单射. 又由于 $\forall x\in\mathscr{X}$, 存在 $x_1\in N(\lambda I-A)$, $x_2\in\mathscr{X}_2$, 使得 $x=x_1+x_2$. 从而

$$(\lambda I-A)x=(\lambda I-A)x_1+(\lambda I-A)x_2=Tx.$$

因此 $R(T)=R(\lambda I-A)$.

于是我们只需要证明, 存在 $\alpha>0$, 使得 $\forall x\in\mathscr{X}_2$, 有 $\|Tx\|\geqslant\alpha\|x\|$. 为了便于证明, 对 x 标准化, 则需要证明 $\forall x\in\mathscr{X}_2$ 且 $\|x\|=1$, 有 $\|Tx\|\geqslant\alpha$.

假设上述结论不真, 则 $\forall n\geqslant 1$, 存在 $\{x_n\}\subset\mathscr{X}_2$, 使得 $\|Tx_n\|\leqslant\dfrac{1}{n}$. 从而 $Tx_n=\lambda x_n-Ax_n\to 0$. 而由 $A\in\mathcal{C}(\mathscr{X})$ 知, 存在子列 $\{Ax_{n_j}\}\subset\{Ax_n\}$ 以及 $y\in\mathscr{X}$, 使得 $Ax_{n_j}\to y$. 而注意到 $Tx_{n_j}=\lambda x_{n_j}-Ax_{n_j}$ 且 $\lambda\neq 0$, 因此

$$x_{n_j}=\frac{1}{\lambda}(Ax_{n_j}+Tx_{n_j})\to\frac{y}{\lambda}.$$

又由于 $\|x_{n_j}\|=1$, 则 $\left\|\dfrac{y}{\lambda}\right\|=1$, 从而 $\|y\|=|\lambda|>0$. 而注意到

$$Ty=\lim_{n\to\infty}T(\lambda x_{n_j})=\lambda\lim_{n\to\infty}T(x_{n_j})=0.$$

而 T 为单射, 因此 $y=0$, 这与 $\|y\|>0$ 矛盾! □

定理 3.6.3. 设 $\lambda\neq 0$, $A\in\mathcal{C}(\mathscr{X})$. 若 $N(\lambda I-A)=\{0\}$, 则 $R(\lambda I-A)=\mathscr{X}$.

证明. 对于任意的 $n\in\mathbb{N}^*$, 令 $\mathscr{X}_n=R[(\lambda I-A)^n]$, 从而若 $\mathscr{X}_1\neq\mathscr{X}$, 则存在 $0\neq y\in\mathscr{X}\setminus\mathscr{X}_1$. 令 $y_1=(\lambda I-A)y$, 由于 $y\in\mathscr{X}$, 则 $y_1\in\mathscr{X}_1$. 我们断言 $y_1\notin\mathscr{X}_2$, 否则存在 $x_2\in\mathscr{X}$, 使得 $y_1=(\lambda I-A)^2x_2$. 则有

$$(\lambda I-A)[y-(\lambda I-A)x_2]=0,$$

从而 $y=(\lambda I-A)x_2\in\mathscr{X}_1$, 矛盾! 因此有 $\mathscr{X}_1\neq\mathscr{X}_2$. 另一方面, 由于

$$\mathscr{X}_2=(\lambda I-A)^2\mathscr{X}=(\lambda I-A)[(\lambda I-A)x]=(\lambda I-A)\mathscr{X}_1\subset(\lambda I-A)\mathscr{X}=\mathscr{X}_1.$$

则有 $\mathscr{X}_2\subsetneqq\mathscr{X}_1\subsetneqq\mathscr{X}$. 类似地可以证明, $\forall k\geqslant 1$, 有 $\mathscr{X}_{k+1}\subsetneqq\mathscr{X}_k$.

由定理 (3.6.2) 知, $\mathscr{X}_{k+1},\mathscr{X}_k$ 均为 $\mathscr{X}$ 的闭子空间, 而

$$(\lambda I-A)^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\lambda^{k-j}A^j(-1)^j=\lambda^kI+\left[\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\lambda^{k-j}A^{j-1}(-1)^j\right]A=\mu I+C,$$

从而由 Riesz 引理 (2.2.2) 知, $\forall k \geqslant 1$, 存在 $x_k \in \mathscr{X}_k \setminus \mathscr{X}_{k+1}$ 且 $\|x_k\| = 1$, 使得

$$\operatorname{dist}(x_k, \mathscr{X}_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

又 $\forall p \geqslant 1$ 及 $k \geqslant 1$, 有

$$\|Ax_{k+p} - Ax_k\| = \|\lambda x_{k+p} - (\lambda I - A)x_{k+p} - \lambda x_k + (\lambda I - A)x_k\|,$$

且 $\mathscr{X}_{k+p+1} \subset \mathscr{X}_{k+p} \subset \mathscr{X}_{k+1}$, 则有 $\lambda x_{k+p} - (\lambda I - A)x_{k+p} + (\lambda I - A)x_k \in \mathscr{X}_{k+1}$, 因此

$$\|Ax_{k+p} - Ax_k\| \geqslant |\lambda| \operatorname{dist}(x_k, \mathscr{X}_{k+1}) > \frac{1}{2}|\lambda|,$$

这与 A 为紧算子矛盾! 故 $R(\lambda I - A) = \mathscr{X}$. □

定理 3.6.4. 设 $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X})$, 则 $\sigma(A)$ 没有非零的聚点.

定理 3.6.5. 设 $\lambda \neq 0$, $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X})$, 则存在 $n_0 \geqslant 1$, 使得 $\forall j \geqslant 1$, 有

$$N[(\lambda I - A)^{n_0}] = N[(\lambda I - A)^{n_0+j}].$$

证明. 等价于证明存在 $n_0 \geqslant 1$, 使得

$$N(\lambda I - A)^{n_0} = N(\lambda I - A)^{n_0+1} \quad \Longrightarrow \quad N(\lambda I - A)^{n_0+1} = N(\lambda I - A)^{n_0+2}.$$

$\forall y \in N(\lambda I - A)^{n_0+2}$, 则有 $(\lambda I - A)^{n_0+2}y = 0$, 即 $(\lambda I - A)^{n_0+1}(\lambda I - A)y = 0$. 因此 $(\lambda I - A)y \in N(\lambda I - A) = N(\lambda I - A)^{n_0}$. 从而 $(\lambda I - A)^{n_0}(\lambda I - A)y = 0$, 即 $(\lambda I - A)^{n_0+1}y = 0$. 从而有 $y \in N(\lambda I - A)^{n_0+1}$, 故 $N(\lambda I - A)^{n_0+2} \subseteq N(\lambda I - A)^{n_0+1}$. □

定理 3.6.6. 设 $\lambda \neq 0$, $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X})$, 如果存在 $n_0 \geqslant 1$, 使得 $\forall j \geqslant 1$, 有

$$N[(\lambda I - A)^{n_0}] = N[(\lambda I - A)^{n_0+j}],$$

则 $N[(\lambda I - A)^{n_0}] \cap R[(\lambda I - A)^{n_0}] = \{0\}$.

证明. $\forall x \in N(\lambda I - A)^{n_0} \cap R(\lambda I - A)^{n_0}$, 存在 $y \in \mathscr{X}$, 使得 $x = (\lambda I - A)^{n_0}y$. 从而

$$0 = (\lambda I - A)^{n_0}x = (\lambda I - A)^{2n_0}y.$$

故 $y \in N(\lambda I - A)^{2n_0} = N(\lambda I - A)^{n_0}$, 从而 $x = (\lambda I - A)^{n_0}y = 0$. □

定理 3.6.7. 设 $\lambda \neq 0$, $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X})$. 如果存在 $n_0 \geqslant 1$, 使得 $\forall j \geqslant 1$, 都有

$$N(\lambda I - A)^{n_0} = N(\lambda I - A)^{n_0+j},$$

则 $\mathscr{X} = N(\lambda I - A)^{n_0} \oplus R(\lambda I - A)^{n_0}$.

证明. 由于 $N(\lambda I - A)^{n_0}$ 为有限维的, 因此存在 $e_1, e_2, \cdots, e_n \in \mathscr{X}$, 使得 $N(\lambda I - A)^{n_0} = \operatorname{span}\{e_j\}_{j=1}^n$. 再由 Hahn-Banach 定理的推论, 存在 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathscr{X}^*$, 使得

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

定义 $B : \mathscr{X} \to N(\lambda I - A)^{n_0}$ 为

$$B(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x) e_j,$$

则 $\forall x \in N(\lambda I - A)^{n_0}$, 有 $B(x) = x$, 且 $B \in \mathcal{C}(\mathscr{X})$. 再定义 $T : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 为

$$Tx = (\lambda I - A)^{n_0} x - B(x).$$

要证 T 为满射, 即 $\forall y \in \mathscr{X}$, 存在 $x \in \mathscr{X}$, 使得 $Tx = y$, 即 $y = (\lambda I - A)^{n_0} x - B(x)$. 从而 $Tx = (\lambda I - A)^{n_0} x - Bx = (\mu I - C - B)(x)$. 此时转化为证明 T 为单射, 即 $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$, 而这是显然的, 因此原定理得证. □

推论 3.6.1. 设 $\lambda \neq 0$, $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X})$, 如果存在 $n_0 \geqslant 1$, 使得 $\forall j \geqslant 1$, 有

$$N[(\lambda I - A)^{n_0}] = N[(\lambda I - A)^{n_0+j}].$$

(1) $(\lambda I - A)|_{R[(\lambda I - A)^{n_0}]}$ 是单射;

(2) $(\lambda I - A)|_{R[(\lambda I - A)^{n_0}]}$ 是满射;

(3) $N[(\lambda I - A)^{n_0}]$ 和 $R[(\lambda I - A)^{n_0}]$ 是 $\lambda I - A$ 的不变子空间;

(4) $\dim N(\lambda I - A) = \operatorname{codim} R(\lambda I - A)$;

(5) $\dim N(\lambda I - A) = \dim N(\lambda I - A')$.

证明. (1) 取 $x \in R(\lambda I - A)^{n_0}$, 使 $(\lambda I - A)x = 0$, 则存在 $y \in \mathscr{X}$, 使得

$$x = (\lambda I - A)^{n_0} y \implies y \in N[(\lambda I - A)^{n_0+1}] = N[(\lambda I - A)^{n_0}] \implies x = 0.$$

(2) 只需证明 $A|_{R[(\lambda I-A)^{n_0}]}$ 是紧算子. 由 $R[(\lambda I-A)^{n_0}]$ 在 $\mathscr{X}$ 中闭, 知 $R[(\lambda I-A)^{n_0}]$ 是 Banach 空间. 取

$$\{x_n\}\subset R[(\lambda I-A)^{n_0}]\subset \mathscr{X},$$

由 A 是紧算子, 存在 $\{Ax_{n_j}\}\subset\{Ax_n\}$ 及 $y\in\mathscr{X}$, 使得 $Ax_{n_j}\to y$, 且由 $R[(\lambda I-A)^{n_0}]$ 是 Banach 空间知 $y\in R[(\lambda I-A)^{n_0}]$, 从而 $A|_{R[(\lambda I-A)^{n_0}]}$ 是紧算子.

(3) 由 (1) 和 (2) 知

$$\lambda I-A: R[(\lambda I-A)^{n_0}]\to R[(\lambda I-A)^{n_0}]$$

是一一到上的, 从而 $R[(\lambda I-A)^{n_0}]$ 是 $\lambda I-A$ 的不变子空间; 另外, 根据

$$\lambda I-A: N[(\lambda I-A)^{n_0}]\to N[(\lambda I-A)^{n_0-1}]\subset N[(\lambda I-A)^{n_0}]$$

得知, $N[(\lambda I-A)^{n_0}]$ 也是 $\lambda I-A$ 的不变子空间.

(4) 一方面, 由 $\lambda I-A: R[(\lambda I-A)^{n_0}]\to R[(\lambda I-A)^{n_0}]$ 是一一到上的, 知

$$\dim N(\lambda I-A)=\dim N\left((\lambda I-A)|_{N[(\lambda I-A)^{n_0}]}\right).$$

对任意的 $x\in\mathscr{X}$, 存在唯一的 $x_1\in N[(\lambda I-A)^{n_0}]$, $x_2\in R[(\lambda I-A)^{n_0}]$, 使得 $x=x_1+x_2$, 从而可以建立映射

$$x=x_1+x_2\mapsto (x_1,x_2).$$

从而

$$\begin{aligned}(\lambda I-A)x=0 &\iff (\lambda I-A)x_1=0,\quad (\lambda I-A)x_2=0\\ &\iff (\lambda I-A)x_1=0,\quad x_2=0,\end{aligned}$$

因此

$$N\left((\lambda I-A)|_{N[(\lambda I-A)^{n_0}]}\right)\subset N(\lambda I-A)\subset N\left((\lambda I-A)|_{N[(\lambda I-A)^{n_0}]}\right)\oplus\{0\},$$

此即说明

$$\dim N(\Lambda I-A)=\dim N\left((\lambda I-A)|_{N[(\lambda I-A)^{n_0}]}\right);$$

另外一方面, 由

$$\begin{aligned}R(\lambda I-A)&=\{((\lambda I-A)x_1,(\lambda I-A)x_2)|x_1\in N[(\lambda I-A)^{n_0}],x_2\in R[(\lambda I-A)^{n_0}]\}\\ &=R\left((\lambda I-A)|_{N[(\lambda I-A)^{n_0}]}\right)\oplus R[(\lambda I-A)^{n_0}],\end{aligned}$$

知

$$\operatorname{codim}R(\lambda I-A)=\operatorname{codim}R\left((\lambda I-A)|_{N[(\lambda I-A)^{n_0}]}\right).$$

在以上两式的基础上, 有

$$\begin{aligned}\dim N(\Lambda I-A)&=\dim N\left((\lambda I-A)|_{N[(\lambda I-A)^{n_0}]}\right)\\&=\operatorname{codim}R\left((\lambda I-A)|_{N[(\lambda I-A)^{n_0}]}\right)\\&=\operatorname{codim}R(\lambda I-A),\end{aligned}$$

其中 $N(\lambda I-A)^{n_0}$ 是有限维的, 对有限维空间上的线性算子 $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 有 $\dim N(X)=n-\dim R(X)=\operatorname{codim}R(X)$.

(5) 由 $A\in\mathcal{C}(\mathscr{X})$ 知 $A'\in\mathcal{C}(\mathscr{X})$. 若 $\lambda\in\rho(A)$, 则 $\lambda\in\rho(A')$, 由 $N(\lambda I-A)=N(\lambda I-A')=\{0\}$, 知

$$\dim N(\lambda I-A)=\dim N(\lambda I-A')=0;$$

若 $\lambda\notin\rho(A)$, 则 $\lambda\in\sigma_P(A)$, 设 $\dim N(\lambda I-A')=n$, 则存在线性无关的 $f_1,f_2,\cdots,f_n\in N(\lambda I-A')$, 并且存在线性无关的 $e_1,e_2,\cdots,e_n\in\mathscr{X}$, 使得

$$f_i(e_j)=\delta_{ij}.$$

要证明 $\dim N(\lambda I-A')=\operatorname{codim}R(\lambda I-A)$, 首先说明 $R(\lambda I-A)\subset\mathscr{X}$ 是闭子空间. 这是因为

$$\begin{aligned}y\in\overline{R(\lambda I-A)}&\iff\forall f\in N(\lambda I-A'),\quad f(y)=0,\\&\iff\forall 1\leqslant j\leqslant n,\quad f_j(y)=0\\&\iff y\in\bigcap_{j=1}^{n}\operatorname{Ker}f_j.\end{aligned}$$

从而

$$R(\lambda I-A)=\overline{R(\lambda I-A)}=\bigcap_{j=1}^{n}\operatorname{Ker}f_j,$$

因此

$$\begin{aligned}\mathscr{X}&=\left(\operatorname{span}\{e_j\}_{j=1}^{n}\right)\oplus\left(\bigcap_{j=1}^{n}\operatorname{Ker}f_j\right)\\&=\left(\operatorname{span}\{e_j\}_{j=1}^{n}\right)\oplus R(\lambda I-A),\end{aligned}$$

此即说明 $\operatorname{codim}R(\lambda I-A)=n$, 故 $\dim N(\lambda I-A)=\dim N(\lambda I-A')$. $\square$

定理 3.6.8 (Fredholm 二择一定理). 设 $A \in \mathcal{C}(\mathscr{X})$.

(1) $(\lambda I - A)x = y$ 存在唯一解 $\Longleftrightarrow$ $(\lambda I - A)x = 0$ 只有零解;

(2) $\lambda \neq 0$, 则 $\dim N(\lambda I - A) = \dim N(\lambda I - A')$;

(3) $(\lambda I - A)x = y$ 有解 $\Longleftrightarrow$ $\forall f \in N(\lambda I - A')$, 有 $f(y) = 0$.

第四章　Hilbert 空间

4.1　Hilbert 空间的基本概念

定义 4.1.1. 设 $\mathscr{H}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 如果对任意的 $x, y \in \mathscr{H}$, 都有唯一的 $(x, y) \in \mathbb{K}$, 满足

(1) (**正定性**) $\forall x \in \mathscr{H}$, $(x, x) \geqslant 0$, 且 $d(x, x) = 0 \iff x = 0$;

(2) (**共轭对称性**) $\forall x, y \in \mathscr{H}$, 有 $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(3) (**关于第一变元的线性性**) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x, y, z \in \mathscr{H}$, 有

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z),$$

称 $(\cdot, \cdot)$ 是 $\mathscr{H}$ 上的**内积**, (x, y) 称为 x 与 y 的**内积**, 称 $\mathscr{H}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的**内积空间**.

如果 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, 则 $(\cdot, \cdot)$ 关于第二变元是共轭线性的, 即 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x, y, z \in \mathscr{H}$, 有

$$(z, \alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}(z, x) + \overline{\beta}(z, y).$$

• **例 36.** $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, 定义内积

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = x \cdot y;$$

$\forall x, y \in \mathbb{C}^n$, 定义内积

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_j \overline{y_j}.$$

• **例 37.** $\forall x, y \in \ell^2$, 定义内积

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}.$$

• **例 38.** 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 是测度空间, $\forall u, v \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mu)$, 定义内积

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)} \mathrm{d}\mu(x).$$

定理 4.1.1 (Cauchy-Schwarz 不等式). *设 $\mathscr{H}$ 是内积空间, 则对任意的 $x, y \in \mathscr{H}$, 有 $|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y)$.*

证明. 若 $y = 0$, 则结论显然成立; 若 $y \neq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, 有

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \lambda(y, x) + \overline{\lambda}(x, y) + |\lambda|^2(y, y) \geqslant 0.$$

取 $\lambda = -\dfrac{(x, y)}{(y, y)}$ 即可. □

定理 4.1.2. *设 $\mathscr{H}$ 为内积空间, $\forall x \in \mathscr{H}$, 定义 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, 则 $\|\cdot\|$ 为 $\mathscr{H}$ 上的范数, 从而 $\mathscr{H}$ 为线性赋范空间, 称 $\|\cdot\|$ 为由内积诱导出来的范数.*

定义 4.1.2. 称完备的内积空间为 **Hilbert 空间**.

定理 4.1.3. *内积空间的完备化空间为 Hilbert 空间.*

定理 4.1.4. *设 $\mathscr{H}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的内积空间, $\|\cdot\|$ 为由内积诱导的范数. $\forall x, y \in \mathscr{H}$,*

(1) 若 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, 则有 $(x, y) = \dfrac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$;

(2) 若 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, 则有 $(x, y) = \dfrac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + \dfrac{\mathrm{i}}{4}(\|x + \mathrm{i}y\|^2 - \|x - \mathrm{i}y\|^2)$.

通过简单的计算, 上述定理的证明是显然的.

定理 4.1.5 (平行四边形法则). 设 $\mathscr{H}$ 为内积空间, $\|\cdot\|$ 为内积所诱导的范数. $\forall x,y\in\mathscr{H}$, 有

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$

上述定理也可以通过简单计算得到.

定理 4.1.6. 设 $\mathscr{X}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的线性赋范空间, $\|\cdot\|$ 为 $\mathscr{X}$ 上的范数. 如果 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形法则, 则可以在 $\mathscr{X}$ 上定义内积, 使得 $\|\cdot\|$ 由该内积所诱导.

• **例 39.** 设 $\mathscr{X}=C([0,1])$, 取 $x=x(t)=t$, $y=y(t)\equiv 1$, 从而 $\|x\|=\|y\|=1$, $\|x+y\|=2$, $\|x-y\|=1$, 此时

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5\neq 4=(\|x\|+\|y\|)^2,$$

即平行四边形法则不成立.

• **例 40.** 设 $\mathscr{X}=\ell^p(p\geqslant 1)$. 设 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,\cdots)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\cdots)$, 从而 $\|\boldsymbol{e}_1\|=\boldsymbol{e}_2\|=1$, $\|\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\|=\|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\|=2^{1/p}$, 则当 $p\neq 2$ 均不满足平行四边形法则, 当 $p=2$ 时 $\mathscr{X}$ 上可以定义内积

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j=1}^{\infty}x_j\overline{y_i},\quad \boldsymbol{x}=\{x_j\}_{j=1}^{\infty},\boldsymbol{y}=\{y_j\}_{j=1}^{\infty}.$$

类似地, $L^p(\Omega)$ 上当且仅当 $p=2$ 时可以定义内积

$$(u,v)=\int_{\Omega}u(x)\overline{v(x)}\mathrm{d}x.$$

4.2 正规正交集

定义 4.2.1. 设 $\mathscr{H}$ 为内积空间,

(1) 设 $x,y\in\mathscr{H}$, 如果 $(x,y)=0$, 则称 x 与 y **正交**, 记作 $x\perp y$;

(2) 设 $x\in\mathscr{H}$, $M\subset\mathscr{H}$, 如果对于任意的 $y\in M$, 都有 $(x,y)=0$, 则称 x 与

集合 M **正交**, 记作 $x \perp M$;

(3) 设 M, N 为 $\mathscr{H}$ 的两个非空子集, 若 $\forall x \in M, y \in N$, 均有 $(x, y) = 0$ 成立, 则称集合 M 与 N **正交**;

(4) 设 $M \subset \mathscr{H}$, 把 $\mathscr{H}$ 中所有与 M 正交的元素记为 M 的**正交补**, 记作 $M^{\perp}$.

关于上述的定义, 容易给出以下性质:

(1) $x \perp y \Rightarrow y \perp x$;

(2) $x \perp y_1$ 且 $x \perp y_2$, 则有

$$x \perp \operatorname{span}\{y_1, y_2\} = \{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\};$$

(3) 设 $x \perp y_n$ 且 $y_n \to y$, 则 $x \perp y$;

证明. $|(x, y_n) - (x, y)| = |(x, y_n - y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0 \Rightarrow (x, y) = 0$. □

(4) 设 M 为 $\mathscr{H}$ 的非空子集, 则 $x \perp M \iff x \perp \overline{M}$;

(5) $x \perp \mathscr{H} \iff x = 0$;

(6) 设 $M \subset N \subset \mathscr{H}$, 则 $N^{\perp} \subset M^{\perp}$;

(7) (**勾股定理**) 设 $x \perp y$, 则 $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$;

(8) 设 $x \in \mathscr{H}$ 且 M 为 $\mathscr{H}$ 的稠密子集, 如果 $\forall y \in M$, 有 $(x, y) = 0$, 则 $x = 0$.

证明. M 稠密: $\exists \{y_n\} \subset M$, 使得 $y_n \to x$, 从而 $(x, y_n) \to (x, x) = 0$, 故 $x = 0$. □

另证. $\forall y \in \mathscr{H}$, $\exists \{y_n\} \subset M$ 使得 $y_n \to y$. 从而 $0 = (x, y_n) \to (x, y)$, 故 $x \perp \mathscr{H}$. □

定义 4.2.2. 设 $\mathscr{H}$ 为内积空间, 称 $\mathscr{H}$ 中一族元素 $\{e_j\}_{j \in I}$ 为**正交集**, 如果对于任意的 $i, j \in I$ 且 $i \neq j$, 都有 $(e_i, e_j) = 0$; 称 $\{e_j\}_{j \in I}$ 为**标准正交集**, 如果对于所有的 $j \in I$, 均有 $\|e_j\| = 1$. 称 $\{e_j\}_{j \in I}$ 是**完备**[a]的, 如果不存在非零元 x, 使得 $\forall j \in I$, 都有 $(x, e_j) = 0$.

[a]注意这里的完备不同于空间的完备.

定理 4.2.1. 设 $\mathscr{H} \neq \{0\}$ 为内积空间, 则 $\mathscr{H}$ 有完备的正规正交基.

证明. 设 $\mathcal{F}$ 为 $\mathscr{H}$ 的所有正规正交集构成的集合, 由 $\mathscr{H} \neq \{0\}$ 知 $\mathcal{F} \neq \varnothing$. 从而存在 $x \neq 0$, 令 $x_1 = \dfrac{x}{\|x\|}$, 有 $\{x_1\} \in \mathcal{F}$. 设 $\{s_1\}, \{s_2\} \in \mathcal{F}$, 并记 $s_1 \leqslant s_2 \iff \{s_1\} \subseteq \{s_2\}$,

从而得到一个半序集 $(\mathcal{F},\subseteq)$. 由 Zorn 引理, $\mathcal{F}$ 中任何全序集均有上确界, 即这些集合的并. 从而 $\mathcal{F}$ 有极大元 S. 可以断言 S 是完备的, 否则存在 $x\neq 0$ 且 $\|x\|=1$, 使得 $\forall y\in S$, 均有 $(x,y)=0$. 令 $S_1=S\cup\{x\}$, 这与 S 的极大性矛盾! □

定义 4.2.3. 设 $\mathscr{H}$ 为内积空间, $\{e_i\}_{i\in I}$ 为 $\mathscr{H}$ 中的一组正规正交集. $\forall x\in\mathscr{H}$, 称数集 $\{(x,e_i)|i\in I\}$ 为 x 关于 $\{e_i\}_{i\in I}$ 的 **Fourier 系数集**.

定理 4.2.2. 设 $\mathscr{H}$ 为内积空间, $\{e_i\}_{i\in I}$ 为 $\mathscr{H}$ 中的正规正交集, 则 $\forall x\in\mathscr{H}$, 有

$$\left\|x-\sum_{j=1}^{n}(x,e_j)e_j\right\|^2+\sum_{j=1}^{n}|(x,e_j)|^2=\|x\|^2.$$

且 $\sum_{j=1}^{n}|(x,e_j)|^2\leqslant\|x\|^2$.

证明.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|(x,e_j)|^2&=\left\|\sum_{j=1}^{n}(x,e_j)e_j\right\|^2=\left(\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i,\sum_{j=1}^{n}(x,e_j)e_j\right)\\&=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x,e_j)\overline{(x,e_i)}(e_i,e_j)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x,e_j)\overline{(x,e_i)}\cdot\delta_{ij}.\end{aligned}$$

令 $y=\sum\limits_{j=1}^{n}(x,e_j)e_j$, 则 $\|x-y\|^2+\|y\|^2=\|x\|^2\iff(x-y,y)=0$. 从而 $\forall 1\leqslant i\leqslant n$, $(x-y,e_i)=(x,e_i)-(y,e_i)=0$. □

定理 4.2.3. 设 $\mathscr{H}$ 为内积空间, $\{e_i\}_{i\in I}$ 为 $\mathscr{H}$ 中的一组正规正交集, 则 $\forall x\in\mathscr{H}$, x 关于 $\{e_i\}_{i\in I}$ 的 *Fourier* 系数中至多有可数个非零且

$$\sum_{i\in I}|(x,e_i)|^2\leqslant\|x\|^2.$$

其中 $\sum\limits_{i\in I}|(x,e_i)|^2$ 是关于至多可数个非零元的求和.

证明. $\forall k\geqslant 1$, 令

$$F_k=\left\{(x,e_j)\,\middle|\,|(x,e_j)|^2\geqslant\frac{1}{k},j\in I\right\},$$

从而由定理 (4.2.2) 知, F_k 中有有限个元素. 又由于

$$\{(x,e_j)|(x,e_j)\neq 0, j\in I\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k,$$

从而 $\{(x,e_j)|(x,e_j)\neq 0\}$ 是至多可数的. 我们将其记为 $(x,e_{i_1}),(x,e_{i_2}),\cdots,(x,e_{i_n}),\cdots$, 从而 $\forall i\in I$ 且 $i\neq k$, 有 $(x,e_i)=0$. 故 $\forall n\geqslant 1$, 有 $\sum\limits_{k=1}^{n}|(x,e_{i_k})|^2\leqslant\|x\|^2$. 令 $n\to\infty$, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_{i_k})|^2\leqslant\|x\|^2.$$

即 $\sum\limits_{i\in I}|(x,e_i)|^2\leqslant\|x\|^2$. □

定理 4.2.4. 设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, $\{e_i\}_{i\in I}$ 是 $\mathscr{H}$ 中的正规正交集, 则 $\forall x\in\mathscr{H}$, 有

$$\sum_{i\in I}(x,e_i)e_i\in\mathscr{H},$$

且

$$\left\|x-\sum_{i\in I}(x,e_i)e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i\in I}|(x,e_i)|^2.$$

证明. $\{(x,e_i)|(x,e_i)\neq 0, i\in\mathscr{L}\}$ 只有可数个元素, 不妨设为

$$(x,e_{i_1}),\quad (x,e_{i_2}),\quad \cdots,\quad (x,e_{i_n}),\quad \cdots$$

则 $\sum\limits_{i\in I}(x,e_i)e_i=\sum\limits_{j=1}^{\infty}(x,e_{i_j})e_{i_j}$. $S_m=\sum\limits_{j=1}^{m}(x,e_{i_j})e_{i_j}$ 是 $\mathscr{H}$ 中的 Cauchy 列, 这是因为

$$\|S_{n+p}-S_n\|^2=\left\|\sum_{j=n+1}^{n+p}(x,e_{i_j})e_{i_j}\right\|=\sum_{j=n+1}^{n+p}|(x,e_{ij})|^2<\sum_{j=n+1}^{\infty}|(x,e_{ij})|^2\to 0,$$

又 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 因此存在 $y\in\mathscr{H}$, 使得 $y=\sum\limits_{j=1}^{\infty}(x,e_{i_j})e_{i_j}$. 接下来, 对任意的 $m\geqslant 1$,

$$\|x-S_m\|^2=\|x\|^2-\|S_m\|^2=\|x\|^2-\sum_{j=1}^{m}|(x,e_{i_j})|^2,$$

令 $m\to\infty$ 得

$$\left\|x-\sum_{j=1}^{\infty}(x,e_{i_j})e_{i_j}\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{j=1}^{\infty}|(x,e_{i_j})|^2,$$

也即 $\left\|x-\sum\limits_{i\in I}(x,e_i)e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum\limits_{i\in I}|(x,e_i)|^2.$ □

定义 4.2.4. 设 $S=\{e_i\}_{i\in I}$ 是内积空间 $\mathscr{H}$ 中的正规正交集, 如果对任意的 $x\in\mathscr{H}$, 有 $x=\sum\limits_{i\in I}(x,e_i)e_i$, 则称 S 是 $\mathscr{H}$ 的一组**基**.

定理 4.2.5. 设 $S=\{e_i\}_{i\in I}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的正规正交集, 如下结论等价:

(1) S 是 $\mathscr{H}$ 的一组基;

(2) S 是完备的;

(3) ***Parseval* 等式**成立, 即对任意的 $x\in\mathscr{H}$, 有 $\|x\|^2=\sum\limits_{i\in I}|(x,e_i)|^2$.

定理 4.2.6. 设 $\mathscr{H}\neq\{0\}$ 是可分的 Hilbert 空间, 则 $\mathscr{H}$ 存在可数的正规正交集.

证明. 由 $\mathscr{H}\neq\{0\}$ 知 $\mathscr{H}$ 存在可数的正规正交集 $S=\{e_i\}_{i\in I}$, 根据定理 (4.2.5) 知 $S=\{e_i\}_{i\in I}$ 是 $\mathscr{H}$ 的一组正规正交基. 由 $\mathscr{H}$ 可分知 $\mathscr{H}$ 有一个可数稠密子集, 记为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=M$. 对 $i\in I$, 存在 $x_{n_i}\in M$, 使得

$$\|e_i-x_{n_i}\|<\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

从而

$$\begin{aligned}\sqrt{2}&=\|e_i-e_j\|\\&\leqslant\|e_i-x_{n_i}\|+\|x_{n_i}-x_{n_j}\|+\|x_{n_j}-e_j\|\\&<\frac{2\sqrt{2}}{3}+\|x_{n_i}-x_{n_j}\|,\end{aligned}$$

解得 $\|x_{n_i}-x_{n_j}\|\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{3}>0$, $x_{n_i}\neq x_{n_j}$. 由此, 可以定义 $f:I\to M$, $i\mapsto x_{n_i}$, 则 f 是单射, 从而 I 一定是可数集. □

定理 4.2.7. 设 M 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的闭线性子空间, 则对任意的 $x \in \mathscr{H}$, 存在唯一的 $y \in M$ 及 $z \in M^{\perp}$, 使得 $x = y + z \iff \mathscr{H} = M \oplus M^{\perp}$.

证明. 由 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间、M 是闭线性子空间知 M 也是 Hilbert 空间, 从而 M 存在正规正交基 $S = \{e_i\}_{i\in I}$, $y = \sum\limits_{i\in I}(x, e_i)e_i \in M$. 令 $z = x - y$, 则对任意的 $i \in I$, $(z, e_i) = (x - y, e_i) = 0$, 故 $z \in M^{\perp}$. 接下来, 设 $x \in M \cap M^{\perp}$, 则 $(x, x) = 0$, 故 $z = 0$, 从而 $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, 这便得到了 $\mathscr{H} = M \oplus M^{\perp}$. □

4.3 Riesz 表示定理与 Lax-Milgram 定理

定理 4.3.1 (Riesz 表示定理). 设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 则对任意的 $f \in \mathscr{H}^*$, 存在唯一的 $z \in \mathscr{H}$, 使得

$$f(x) = (x, z), \quad \forall x \in \mathscr{H}, \quad \text{且} \quad \|f\|_{\mathscr{H}^*} = \|z\|_H.$$

证明. 若 $f = 0$, 取 $z = 0$ 即可. 下设 $f \neq 0$, 则 $\mathrm{Ker} f$ 是 $\mathscr{H}$ 的闭线性子空间, 且对任意的 $x_0 \in \mathscr{H} \setminus \mathrm{Ker} f$, 有 $\mathscr{H} = \mathrm{span}\{x_0\} \oplus \mathrm{Ker} f$. 由正交投影定理, 存在唯一的 $y_0 \in \mathrm{Ker} f$ 及 $z_0 \in (\mathrm{Ker} f)^{\perp}$, 使得 $x_0 = y_0 + z_0$, 其中 $f(z_0) \neq 0$. 对任意的 $x \in \mathscr{H}$, 有

$$f(x) = f(x) \cdot \frac{f(z_0)}{f(z_0)} = f\left(\frac{f(x)}{f(z_0)} z_0\right) \implies x - \frac{f(x)}{f(z_0)} z_0 \in \mathrm{Ker} f.$$

因此

$$\left(x - \frac{f(x)}{f(z_0)} z_0, z_0\right) = 0 \implies f(x) = \frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2} \cdot (x, z_0).$$

令 $z = \dfrac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} \cdot z_0$, 则 $f(x) = (x, z)$, 存在性得证. 假设存在 $z_1, z_2 \in \mathscr{H}$, 使得对任意的 $x \in \mathscr{H}$, 都有

$$f(x) = (x, z_1) = (x, z_2) \implies (x, z_1 - z_2) = 0,$$

取 $x = z_1 - z_2$ 得 $z_1 = z_2$. □

定义 4.3.1. 设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 称 $\varphi : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ 是 $\mathscr{H}$ 上的**有界共轭双线性形式**, 如果对任意的 $x, y, z \in \mathscr{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 有

(1) $\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x, z) + \beta\varphi(y, z)$;

(2) $\varphi(z, \alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}\varphi(z, x) + \overline{\beta}\varphi(z, y)$;

(3) 如果存在 $M > 0$, 使得对任意的 $x, y \in \mathscr{H}$, 有

$$|\varphi(x, y)| \leqslant M\|x\|\|y\|.$$

定理 4.3.2. *设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, φ 是 $\mathscr{H}$ 上的有界共轭双线性形式, 则存在唯一的 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$, 使得对任意的 $x, y \in \mathscr{H}$, 有*

$$\varphi(x, y) = (x, Ay).$$

证明. 固定 $y \in \mathscr{H}$, 则 $\varphi(\cdot, y) \in \mathscr{H}^*$. 由 Riesz 表示定理知, 存在唯一的 $w_y \in \mathscr{H}$, 使得

$$\varphi(x, y) = (x, w_y).$$

定义 $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, $y \mapsto w_y$, 则 $\varphi(x, y) = (x, Ay)$. 接下来证明 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$. 根据

$$\|Ay\| = \|w_y\| = \|\varphi(\cdot, y)\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\varphi(x, y)| \leqslant M\|y\|,$$

知 A 有界; 又对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $y, z \in \mathscr{H}$, 有

$$\begin{aligned}(x, A(\alpha y + \beta z)) &= \varphi(x, \alpha y + \beta z)\\ &= \overline{\alpha}\varphi(x, y) + \overline{\beta}\varphi(x, z)\\ &= \varphi(x, \alpha y + \beta z)\\ &= (x, A(\alpha y + \beta z)),\end{aligned}$$

因此 A 是线性的, 故 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$. □

定理 4.3.3. *设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$, 使得对任意的 $x \in \mathscr{H}$, 有*

$$|(x, Ax)| \geqslant \alpha\|x\|^2,$$

则 A 是到上的.

证明. 首先根据

$$\alpha\|x\|^2 \leqslant |(x, Ax)| \leqslant \|x\| \cdot \|Ax\| \implies \alpha\|x\| \leqslant \|Ax\|,$$

先证明 $R(A)$ 是闭的: 设 $\{y_n\} \subset R(A)$, 且 $y_n \to y$, 则存在 $\{x_n\} \subset \mathscr{H}$, 使得 $y_n = Ax_n$, 且

$$\alpha\|x_n - x_m\| \leqslant \|Ax_n - Ax_m\| = \|y_n - y_m\| \to 0,$$

故 $\{x_n\}$ 是 $\mathscr{H}$ 中的 Cauchy 列, 从而存在 $x \in \mathscr{H}$, 使得 $x_n \to x$, 故 $Ax_n \to Ax \in R(A)$.
设 $R(A) \neq \mathscr{H}$, 则 $\mathscr{H} = R(A) \oplus R(A)^{\perp}$. 任取 $x_0 \in R(A)^{\perp} \setminus \{0\}$, 从而

$$0 = |(x_0, Ax_0)| \geqslant \alpha\|x_0\|^2 \implies \alpha = 0,$$

矛盾. 故 $R(A) = \mathscr{H}$. □

根据上述的两个定理, 可以得到以下定理:

定理 4.3.4 (Lax-Milgram 定理). *设 $\mathscr{H}$ 为 Hilbert 空间, $\varphi : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ 为 $\mathscr{H}$ 上的共轭双线性形式. 如果 φ 满足以下条件:*

*(1) φ 是**有界**的, 即存在 $M > 0$, 使得 $\forall x, y \in \mathscr{H}$, 有 $|\varphi(x, y)| \leqslant M\|x\| \cdot \|y\|$;*

*(2) φ 是**强制**的, 即存在 $\alpha > 0$, 使得 $\forall x \in \mathscr{H}$, 有 $|\varphi(x, x)| \geqslant \alpha\|x\|^2$.*

则 $\forall f \in \mathscr{H}^*$, 存在唯一 $x \in \mathscr{H}$, 使得 $\forall y \in \mathscr{H}$, 有 $\varphi(x, y) = f(y)$.

证明. 由定理 (4.3.2) 知, 存在唯一 $A \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$, 使得 $\forall x, y \in \mathscr{H}$, 有

$$\varphi(x, y) = (y, Ax).$$

再由 Riesz 表示定理, 存在唯一 $w \in \mathscr{H}$, 使得

$$f(y) = (y, w), \quad \forall y \in \mathscr{H}.$$

因此要想说明 $\forall y \in \mathscr{H}$ 有 $\varphi(x, y) = f(y)$, 只需证明存在唯一 $x \in \mathscr{H}$, 使得 $Ax = w$.

由 A 是满的, 从而存在 $x \in \mathscr{H}$, 使得 $Ax = w$, 存在性得证; 假设同时存在 $x_1, x_2 \in \mathscr{H}$, 使得

$$\varphi(x_1, y) = \varphi(x_2, y) = f(y), \quad \forall y \in \mathscr{H},$$

则有 $\varphi(x_1 - x_2, y) = 0$, $\forall y \in \mathscr{H}$. 从而取 $y = x_1 - x_2$, 即可得到 $(x_1 - x_2, x_1 - x_2) = 0$, 故有 $x_1 = x_2$. 因此 $\varphi(x, y) = f(y)$ 的解存在且唯一. □

4.4 Sobolev 空间

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集, 定义

$$C^1(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C(\overline{\Omega}) \middle| u \text{ 的一阶导数在 } \Omega \text{ 上连续}\right\},$$

称为**一阶连续可微函数空间**.

$\forall u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, 定义

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \mathrm{d}x,$$

则可以验证, $(\cdot, \cdot)$ 为 $C^1(\overline{\Omega})$ 上的内积, 并记 $\big(C^1(\overline{\Omega}), (\cdot, \cdot)\big) = \mathscr{H}_1$. 将 $\mathscr{H}_1$ 关于内积 $(\cdot, \cdot)$ 的完备化空间记为 $\mathscr{H}_1(\Omega)$, 则 $\mathscr{H}_1(\Omega)$ 为 Hilbert 空间.

我们将

$$C_C^1(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C^1(\overline{\Omega}) \middle| \mathrm{supp} u = \overline{\{x \in \Omega | u(x) \neq 0\}} \text{ 是 } \Omega \text{ 的紧子集}\right\}$$

关于内积 $(\cdot, \cdot)$ 的完备空间记为 $\mathscr{H}_0^1(\Omega)$.

$\forall u \in \mathscr{H}_0^1(\Omega) \subset \mathscr{H}^1(\Omega)$, 有

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

则 $\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{H}^1(\Omega)$ 或 $\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ 上的一个范数. $\forall u \in C^1(\overline{\Omega})$,

$$\|u\|_1 = \left(\int_\Omega |u(x)|^p + |\nabla u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant 0 < \infty.$$

从而将 $C^1(\overline{\Omega})$ 在 $\|\cdot\|_1$ 下的完备化空间记为 $W^{1,p}(\Omega)$. 类似地, 将 $C^k(\overline{\Omega})$ 在 $\|\cdot\|_k$ 下的完备化空间记为 $W^{k,p}(\Omega)$, 其中

$$\|u\|_k = \left(\int_\Omega |u(x)|^p + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant k} |D^{\boldsymbol{\alpha}} u|^p \mathrm{d}x\right), \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

上式中 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 为多重指标, $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, 且 $\dfrac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

对于 $u \in \mathscr{H}_0^1(\Omega)$, 定义

$$J(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x)\right) \mathrm{d}x,$$

其中 $f \in L^2(\Omega)$.

定理 4.4.1. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集, $f\in L^2(\Omega)$, 则 $u\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ 是 J 在 $\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ 上的极小值点, 即 $J(u)=\inf_{v\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)}J(v)$, 其充要条件为, $u\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ 是等式

$$\int_\Omega(\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)+u(x)\cdot v(x))\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x,\quad \forall v\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)$$

的解.

证明. (必要性) $\forall t\in\mathbb{R}$, $\forall v\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)$, 有 $u+tv\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)$. 定义 $\varphi(t)=J(u+tv)$, 则

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}|\nabla(u+tv)|^2-f(x)(u+tv)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2+t|\nabla u\cdot\nabla v|+\frac{t^2}{2}|\nabla v|^2-f(x)u(x)-tf(x)v(x)\right]\mathrm{d}x\\&=J(u)+t\left(\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v-f(x)v(x)\mathrm{d}x\right)+\frac{t^2}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由假设知, $t=0$ 是 φ 在 $\mathbb{R}$ 上的极小值, 则由 Fermat 定理, 有 $\varphi'(0)=0$, 从而

$$\int_\Omega(\nabla u\cdot\nabla v-f(x)v(x))\,\mathrm{d}x,\quad\forall v\in\mathscr{H}_0^1(\Omega).$$

(充分性) $\forall v\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)$, 有 $u+v\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ 且

$$J(u+v)=\varphi(1)=J(u)+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x,\quad\forall v\in\mathscr{H}_0^1.$$

从而 $u\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ 是 J 在 $\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ 上的极小值点. □

定义 4.4.1. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集, $f\in L(\Omega)$. 称 $u\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ 是方程

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

的**弱解**, 如果 $u\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega(\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)+u(x)\cdot v(x))\mathrm{d}x=0,\quad\forall v\in\mathscr{H}_0^1.$$

根据我们在偏微分方程中所学内容, 若 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, 则称 u 为**古典解**. 因此古典解一定为弱解, 反之不成立.

参考文献

[1] 江泽坚, 孙善利. 泛函分析 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1994.

[2] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1987.

[3] 林源渠. 泛函分析学习指南 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2009.

[4] CIARLET P G. Linear and nonlinear functional analysis with applications: volume 130[M]. Paris: Siam, 2013.

[5] EVANS L C. Partial differential equations: Second edition: volume 19[M]. New York: American Mathemarical Society, 2010.