高等概率论讨论班 (第 6 次)
独立性与有限维乘积空间

统计 91 董晟渤

西安交通大学数学与统计学院

日期：2022 年 3 月

目录

1 独立性

1.1 事件的独立

以下设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 为概率空间, 首先讨论事件与事件 σ-域的独立性 (参考苏淳的定义).

- 设事件 $A, B \in \mathscr{F}$, 若

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

  则称事件 A 与事件 B **独立**;

- 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}$, 若对任意的 $2 \leq k \leq n$, 以及对任意的 $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$, 都有

$$\mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k}),$$

  则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **独立**;

- 设事件列 $\{A_n\} \subset \mathscr{F}$, 若对任意的 $n \geq 2$, $\{A_n\}$ 中的 n 个事件都独立, 则称事件列 $\{A_n\}$ 为**独立事件列**;
- 设子事件 σ-域 $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$, 事件 $B \in \mathscr{F}$, 若对任意的 $A \in \mathscr{A}$, 事件 A 与事件 B 独立, 也即
$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B), \quad \forall A \in \mathscr{A},$$
则称事件 σ-域 $\mathscr{A}$ 与事件 B **独立**;
- 设子事件 σ-域 $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subset \mathscr{F}$, 若对任意的 $A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}$, 事件 A 与事件 B 独立, 也即
$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B), \quad \forall A \in \mathscr{A}, \quad \forall B \in \mathscr{B},$$
则称事件 σ-域 $\mathscr{A}$ 与事件 σ-域 $\mathscr{B}$ **独立**;
- 设子事件 σ-域 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n \subset \mathscr{F}$, 若对任意的 $A_1 \in \mathscr{A}_1, A_2 \in \mathscr{A}_2, \cdots, A_n \in \mathscr{A}_n$, 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 独立, 则称事件 σ-域 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n$ 独立.

我们也可以通过独立来生成 σ-域.

命题 1.1. 设 $B \in \mathscr{F}$, 则
$$\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{F} : A \text{ 与 } B \text{ 独立}\}$$
为 σ-域.

证明. 首先验证对补的封闭性. 设 $A \in \mathscr{A}$, 则 A 与 B 独立, 也即 $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. 注意到 Ω 的划分 $\Omega = A \cup A^C$, 由概率的可加性得
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(BA) + \mathbb{P}\left(BA^C\right) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(BA^C\right),$$
因此
$$\mathbb{P}\left(BA^C\right) = \mathbb{P}(B) \cdot (1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}\left(A^C\right),$$
这便说明了 A^C 与 B 独立, 从而 $A^C \in \mathscr{A}$. 接下来验证对有限并的封闭性, 在这里分为两步:

- 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{A}$ 互不相交, 则对任意的 $1 \leq k \leq n$, A_k 与 B 独立, 由概率的可加性得
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(B \bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n BA_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(BA_k) \\ &= \mathbb{P}(B) \cdot \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right),\end{aligned}$$
这便说明了 $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 与 B 独立;
- 对于一般情形, 只需证明 $n = 2$ 的情况. 设 $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$, 且 $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, 可以证明 $A_1 \cap A_2$ 与 B 独立.

最后验证对可数并的封闭性. 设 $\{A_n\}\in\mathscr{A}$, 则对任意的 $n\geq 1$, A_n 与 B 独立. 构造集合 $C_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$, 则 $\{C_n\}\in\mathscr{A}$ 单调上升, 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}C_n$. 此时 $\{BC_n\}$ 也是单调上升的, 由概率的下连续性得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(B\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)&=\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}BC_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(BC_n)=\mathbb{P}(B)\cdot\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(C_n)\\&=\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}C_n\right)=\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right),\end{aligned}$$

这便说明了 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 与 B 独立, 从而 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$. 从而 $\mathscr{A}$ 是 σ-域. □

上述命题说明了独立性对交、并和补等运算的封闭性.

1.2 随机元的独立

基于事件的独立性, 我们可以探讨随机变量的独立性. 在此之前, 我们希望将随机变量的概念延拓到一般的随机元 (参考程士宏的定义) 上, 从而能够将随机变量、随机向量和随机过程的讨论放在一起.

定义 1.1 (随机元)**.** 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 是概率空间, $(\Omega',\mathscr{G})$ 是可测空间, 函数 $X:\Omega\to\Omega'$, 且

$$X^{-1}(\mathscr{A})\subset\mathscr{F},$$

则称 X 是 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 到 $(\Omega',\mathscr{G})$ 的**随机元** (在实变函数中被称为**可测映射**).

- 若 $(\Omega',\mathscr{G})=(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$, 则 X 是随机变量;
- 若 $(\Omega',\mathscr{G})=(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n})$, 则 X 是随机向量;
- 若 $(\Omega',\mathscr{G})=(\mathbb{R}^\infty,\mathscr{B}_{\mathbb{R}^\infty})$, 则 X 是随机过程.

命题 1.2. 设随机元 $X:(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})\to(\Omega',\mathscr{G})$, 则

$$\sigma(X):=X^{-1}(\mathscr{G})$$

是 σ-域.

证明. 首先验证对补的封闭性. 设 $A\in\sigma(X)$, 则存在 $B\in\mathscr{G}$, 使得 $A=X^{-1}(B)$. 由 $B^C\in\mathscr{G}$, 知

$$A^C=\left(X^{-1}(B)\right)^C=X^{-1}\left(B^C\right)\in\sigma(X).$$

接下来验证对可数交的封闭性. 设 $\{A_n\}\subset\sigma(X)$, 则存在 $\{B_n\}\subset\mathscr{G}$, 使得对任意的 $n\geq 1$,

都有 $A_i = X^{-1}(B_i)$. 由 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_i \in \mathscr{G}$, 知

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_i) = X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_i\right) \in \sigma(X).$$

从而 $\sigma(X)$ 是 σ-域. $\square$

设随机元 $X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to (\Omega_1, \mathscr{G}_1), Y : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to (\Omega_2, \mathscr{G}_2)$, 我们可以由 $X^{-1}(\mathscr{G}_1)$ 和 $Y^{-1}(\mathscr{G}_2)$ 分别生成 $\mathscr{F}$ 的子 σ-域, 也即 $\sigma(X)$ 和 $\sigma(Y)$. 联想到两个 σ-域的独立性, 我们定义:

- 若 $\sigma(X)$ 与 $\sigma(Y)$ 独立, 则称随机元 X 与随机元 Y 独立;
- 将上述定义写得更清楚一点. 更具体地说, 若随机元 X 与随机元 Y 独立, 则对任意的 $A \in \sigma(X), B \in \sigma(Y)$, 都有事件 A 与事件 B 独立. 其中, $A \in \sigma(X) = X^{-1}(\mathscr{G}_1)$ 意味着 $C := X(A) \in \mathscr{G}_1$, 从而 $A = (X \in C)$; 类似地, $B \in \sigma(Y) = Y^{-1}(\mathscr{G}_2)$ 意味着 $D := Y(B) \in \mathscr{G}_2$, 从而 $B = (Y \in D)$. 由 A 与 B 的任意性, 知 C 与 D 也是任意的. 从而, 我们可以给出更具体的定义: 若对任意的 $C \in \mathscr{G}_1, D \in \mathscr{G}_2$, 都有事件 $(X \in C)$ 与事件 $(Y \in D)$ 独立, 也即

  $$\mathbb{P}(X \in C, Y \in D) = \mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{P}(Y \in D),$$

  随机元 X 与随机元 Y 独立.

设 $1 \leq i \leq n$, 随机元 $X_i : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to (\Omega_i, \mathscr{G}_i)$, 在这里同样考虑它们生成的 σ-域 $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \cdots, \sigma(X_n)$, 我们定义:

- 若 $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \cdots, \sigma(X_n)$ 独立, 则称随机元 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立;
- 类似上面的过程, 若随机元 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立, 则对任意的 $A_1 \in \sigma(X_1), A_2 \in \sigma(X_2), \cdots, A_n \in \sigma(X_n)$, 都有事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 独立. 设 $1 \leq i \leq n$, 则 $A_i \in \sigma(X_i) = X_i^{-1}(\mathscr{G}_i)$ 意味着 $B_i := X_i(A_i) \in \mathscr{G}_i$, 从而 $A_i = (X_i \in B_i)$. 从而, 可以定义: 对任意的 $B_1 \in \mathscr{G}_1, B_2 \in \mathscr{G}_2, \cdots, B_n \in \mathscr{G}_n$, 都有事件 $(X_1 \in B_1), (X_2 \in B_2), \cdots, (X_n \in B_n)$ 独立, 或者简单地写成

  $$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \cdots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \in B_2) \cdots \mathbb{P}(X_n \in B_n),$$

  则称随机元 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立. 注意到 B_i 可以取到 Ω_i, 从而上面的等式蕴含了事件 $(X_1 \in B_1), (X_2 \in B_2), \cdots, (X_n \in B_n)$ 是独立的.

1.3 随机变量的独立

我们在这里主要讨论的是随机变量的独立性. 在这里限制 $(\Omega', \mathscr{F}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$, 给出随机变量的独立性 (参考钟开莱的定义):

定义 1.2 (随机变量的独立)**.** 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$, 如果对任意的 $B_1, B_2, \cdots, B_n \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, 都有

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \cdots, X_n \in B_N) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \in B_2) \cdots \mathbb{P}(X_n \in B_n),$$

则称随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **独立**.

我们接下来深入探讨随机变量的独立性. 考虑到 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ 中的集合可以由 $(-\infty, x]$ 来生成, 则随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立当且仅当对任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, 都有

$$\mathbb{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n) = \mathbb{P}(X_1 \le x_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \le x_2) \cdots \mathbb{P}(X_n \le x_n).$$

若对 $1 \le i \le n$, 记随机变量 X_i 的分布函数 $F_i(x) := \mathbb{P}(X_i \le x)$, 并记 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) := \mathbb{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n),$$

则随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立当且仅当对任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, 都有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdots F_n(x_n).$$

由此, 我们分别从三个角度定义了随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的独立性: 随机变量所张成的 σ-域、随机变量属于某个 Borel 子集的事件和随机变量的分布函数.

定理 1.3. *设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立, $1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_k = n$, $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 分别为 n_1 元, $n_2 - n_1$ 元, $\cdots$, $n_k - n_{k-1}$ 元 Borel 可测函数, 则随机变量*

$$f_1(X_1, \cdots, X_{n_1}), \quad f_2(X_{n_1+1}, \cdots, X_{n_2}), \quad \cdots, \quad f_k(X_{n_{k-1}+1}, \cdots, X_{n_k})$$

独立.

证明. 由 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立, 知 $(X_1, \cdots, X_{n_1}), (X_{n_1+1}, \cdots, X_{n_2}), \cdots, (X_{n_{k-1}+1}, \cdots, X_{n_k})$ 独立. 为了方便, 记

$$Y_1 = f_1(X_1, \cdots, X_{n_1}), \quad Y_2 = f_2(X_{n_1+1}, \cdots, X_{n_2}), \quad \cdots, \quad Y_k = f_k(X_{n_{k-1}+1}, \cdots, X_{n_k})$$

对任意的 $B_1, B_2, \cdots, B_k \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, 由 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 是 Borel 可测函数, 得知 $f_1^{-1}(B_1) \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n_1}}$, $f_i^{-1}(B_i) \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n_i - n_{i-1}}} (2 \le i \le k)$, 从而

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y_1 \in B_1, Y_2 \in B_2, \cdots, Y_k \in B_k) \\
&= \mathbb{P}((X_1, \cdots, X_{n_1}) \in f_1^{-1}(B_1), \cdots, (X_{n_{k-1}+1}, \cdots, X_{n_k}) \in f_k^{-1}(B_k)) \\
&= \mathbb{P}\left[(X_1, \cdots, X_{n_1}) \in f_1^{-1}(B_1)\right] \cdots \mathbb{P}\left[(X_{n_{k-1}+1}, \cdots, X_{n_k}) \in f_k^{-1}(B_k)\right] \\
&= \mathbb{P}(Y_1 \in B_1) \cdot \mathbb{P}(Y_2 \in B_2) \cdots \mathbb{P}(Y_k \in B_k),
\end{aligned}$$

从而 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$ 独立. □

推论. *设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立, $f_1, f_2, \cdots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 Borel 可测函数, 则随机变量 $f_1(X_1), f_2(X_2), \cdots, f_n(X_n)$ 独立.*

证明. 取 $k = n, n_i = i$ 即可. $\square$

定理 1.4. 设随机变量 X, Y 独立且可积, 则
$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).$$

证明. 首先设 X 和 Y 是离散型随机变量, 记 $X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot I_{\{X=x_i\}}, Y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \cdot I_{\{Y=y_j\}}$, 则
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i), \quad \mathbb{E}(Y) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \cdot \mathbb{P}(Y = y_j).$$
由 X 与 Y 独立知事件 $\{X = x_i\}$ 与事件 $\{Y = y_j\}$ 独立, 从而
$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \mathbb{P}(Y = y_j).$$
注意到 $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}$, 考虑随机变量 XY, 其在 $\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}$ 上取值为 $x_i y_j$, 则有
$$XY = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j \cdot I_{\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\}},$$
并且计算得
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j \cdot \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j \cdot \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \mathbb{P}(Y = y_j) \\ &= \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y),\end{aligned}$$
从而原命题成立; 接下来, 设 X, Y 是非负可积随机变量, 对任意的 $n \geq 1$, 令
$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^n} \cdot I_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n}\right\}}, \quad Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^n} \cdot I_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq Y < \frac{k+1}{2^n}\right\}},$$
则 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 是离散型随机变量序列, 且 $X_n \uparrow X, Y_n \uparrow Y, X_n Y_n \uparrow XY$, 根据单调收敛定理得 $\mathbb{E}(X_n) \uparrow \mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y_n) \uparrow \mathbb{E}(Y), \mathbb{E}(X_n Y_n) \uparrow \mathbb{E}(XY)$. 另外, 对任意的 $n \geq 1$, X_n 和 Y_n 是独立的, 这是因为
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_n = \frac{k_1}{2^n}, Y_n = \frac{k_2}{2^n}\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{k_1}{2^n} \leq X < \frac{k_1+1}{2^n}, \frac{k_2}{2^n} \leq Y < \frac{k_2+1}{2^n}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{k_1}{2^n} \leq X < \frac{k_1+1}{2^n}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\frac{k_2}{2^n} \leq Y < \frac{k_2+1}{2^n}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k_1}{2^n}\right) \cdot \mathbb{P}\left(Y_n = \frac{k_2}{2^n}\right).\end{aligned}$$
应用已经证明的结论, 得 $\mathbb{E}(X_n Y_n) = \mathbb{E}(X_n) \cdot \mathbb{E}(Y_n)$, 再令 $n \to \infty$ 得
$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).$$

最后, 设 X, Y 是可积随机变量, 记 $X = X^+ - X^-$, $Y = Y^+ - Y^-$, 则 X^+、X^- 与 Y^+、Y^- 分别是独立的, 以 X^+ 和 Y^+ 为例, 对任意的 $B_1, B_2 \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X^+ \in B_1, Y^+ \in B_2) &= \mathbb{P}(X \in B_1 \cap [0, +\infty], Y \in B_2 \cap [0, +\infty]) \\ &= \mathbb{P}(X \in B_1 \cap [0, +\infty]) \cdot \mathbb{P}(Y \in B_2 \cap [0, +\infty]) \\ &= \mathbb{P}(X^+ \in B_1, Y^+ \in B_2).\end{aligned}$$

应用已经证明的结论, 得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}[(X^+ - X^-) \cdot (Y^+ - Y^-)] \\ &= \mathbb{E}(X^+Y^+) - \mathbb{E}(X^+Y^-) - \mathbb{E}(X^-Y^+) + \mathbb{E}(X^-Y^-) \\ &= \mathbb{E}(X^+) \cdot \mathbb{E}(Y^+) - \mathbb{E}(X^+) \cdot \mathbb{E}(Y^-) - \mathbb{E}(X^-) \cdot \mathbb{E}(Y^+) + \mathbb{E}(X^-) \cdot \mathbb{E}(Y^-) \\ &= \big[\mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-)\big] \cdot \big[\mathbb{E}(Y^+) - \mathbb{E}(Y^-)\big] \\ &= \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).\end{aligned}$$

从而, 对任意的独立可积随机变量 X, Y, 都有 $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$. □

推论. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立且可积, 则

$$\mathbb{E}(X_1 X_2 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(X_2) \cdots \mathbb{E}(X_n).$$

证明. 由 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立, 知

$$f_1(X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}) := X_1 X_2 \cdots X_{n-1}, \quad \text{与} \quad f_2(X_n) = X_n$$

独立, 再应用数学归纳法即可. □

2 有限维乘积空间

我们接下来探讨的问题是: 独立随机变量是否是存在的? 为了严格地说明这一点, 钟开莱书上引入了乘积空间的概念, 而为了更方便理解, 以下使用的是程士宏书上的定义.

定义 2.1 (乘积空间)**.** 设 $n \geq 2$, $(\Omega_i, \mathscr{F}_i)(1 \leq i \leq n)$ 是可测空间, 记

$$\prod_{i=1}^{n} \Omega_i := \{(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) : \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2, \cdots, \omega_n \in \Omega_n\}$$

则 $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \Omega_i$ 称为 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n$ 的**乘积空间**; 再记

$$\mathscr{L} := \{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n : A_1 \in \mathscr{F}_1, A_2 \in \mathscr{F}_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}_n\}, \quad \prod_{i=1}^{n} \mathscr{F}_i := \sigma(\mathscr{L}),$$

则 $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathscr{F}_i$ 称为 $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \cdots, \mathscr{F}_n$ 的**乘积**, $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{n} \Omega_i, \prod_{i=1}^{n} \mathscr{F}_i\right)$ 称为**乘积可测空间**.

定义 2.2 (投影)**.** 设 $\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$ 是 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n$ 的乘积空间, $\omega_i\in\Omega_i$, 映射

$$\pi_j(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)=\omega_j$$

称为从 $\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$ 到 Ω_j 的**投影**.

在上述定义的基础上, 可以在 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i)$ 上赋予概率测度 $\mathbb{P}_i$. 如果我们考虑概率空间 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i,\mathbb{P}_i)(1\le i\le n)$ 所生成的乘积可测空间 $\left(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i,\prod_{i=1}^{n}\mathscr{F}_i\right)$, 自然会想在其上赋予概率测度. 然而, 这一点是比较麻烦的. 为了方便, 我们首先考虑两个概率空间 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1,\mathbb{P}_1)$ 和 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2,\mathbb{P}_2)$ 的情形, 并记它们生成的乘积空间为 $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$. 我们不加证明地给出 Fubini 定理的内容, 以及有限维乘积概率空间的存在性.

定理 2.1 (Fubini 定理)**.** 设 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1,\mathbb{P}_1)$ 和 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2,\mathbb{P}_2)$ 是概率空间.

(1) 在 $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$ 上存在唯一的概率 $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_2$, 使得对任意的 $A_1\in\mathscr{F}_1$, $A_2\in\mathscr{F}_2$, 都有

$$(\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_2)(A_1\times A_2)=\mathbb{P}_1(A_1)\cdot\mathbb{P}_2(A_2).$$

这里的 $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_2$ 称为 $\mathbb{P}_1$ 和 $\mathbb{P}_2$ 的**乘积**, $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_2)$ 称为**乘积概率空间**.

(2) 对 $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_2)$ 上的可积随机变量 $X(\omega_1,\omega_2)$, 有

$$\begin{aligned}\int_{X_1\times X_2}X\mathrm{d}(\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_2)&=\int_{X_1}\mathbb{P}_1(\mathrm{d}\omega_1)\int_{X_2}X(\omega_1,\omega_2)\mathbb{P}_2(\mathrm{d}\omega_2)\\&=\int_{X_2}\mathbb{P}_2(\mathrm{d}\omega_2)\int_{X_1}X(\omega_1,\omega_2)\mathbb{P}_1(\mathrm{d}\omega_1).\end{aligned}$$

推论. 设 $n\ge 2$, $(\Omega_i,\mathscr{F}_i,\mathbb{P}_i)(1\le i\le n)$ 是概率空间, 则在 $\left(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i,\prod_{i=1}^{n}\mathscr{F}_i\right)$ 上存在唯一的概率测度 $\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}_i$, 使得对任意的 $A_1\in\mathscr{F}_1,A_2\in\mathscr{F}_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}_n$, 都有

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}_i(A_i).$$

这里的 $\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}_i$ 称为 $\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_2,\cdots,\mathbb{P}_n$ 的**乘积**, $\left(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i,\prod_{i=1}^{n}\mathscr{F}_i,\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}_i\right)$ 称为**乘积概率空间**.

在乘积概率空间的基础上, 我们来说明独立随机变量的存在性.

例 2.1 (独立随机变量)**.** 设 $n\ge 2$, $(\Omega_i,\mathscr{F}_i,\mathbb{P}_i)(1\le i\le n)$ 是概率空间. 对 $1\le i\le n$, 设 X_i 是 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i,\mathbb{P}_i)$ 上的随机变量, $B_i\in\mathscr{F}_i$, 则有

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n}(X_i\in B_i)\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}_i(X_i\in B_i).$$

设 $\omega_i \in \Omega_i$, 记 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \prod_{i=1}^n \Omega_i$, 考虑 $\left(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \prod_{i=1}^n \mathscr{F}_i, \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_i\right)$ 上的随机变量

$$\tilde{X}_i(\omega) := X_i(\omega_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

再任取 $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \cdots, \tilde{B}_n \in \prod_{i=1}^n \mathscr{F}_i$, 并设对任意的 $1 \le i \le n$, $\tilde{B}_i$ 在 Ω_i 上的投影为 B_i, 则有

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{P}_i\right)\left(\tilde{X}_1 \in \tilde{B}_1, \tilde{X}_2 \in \tilde{B}_2, \cdots, \tilde{X}_n \in \tilde{B}_n\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^n \mathbb{P}_i\right)\left(\prod_{j=1}^n (X_j \in B_j)\right) \\
&= \prod_{j=1}^n \mathbb{P}_j(X_j \in B_j) \\
&= \prod_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^n \mathbb{P}_i\right)\left(\tilde{X}_j \in \tilde{B}_j\right),
\end{aligned}$$

因此 $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \cdots, \tilde{X}_n$ 是 $\left(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \prod_{i=1}^n \mathscr{F}_i, \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_i\right)$ 上的独立随机变量.