

基于全局优化的“FAST”反射面板调节模型

摘要

在“FAST”的工作过程中,根据待观测天体的方位调整反射面板的位置和角度,同时评价调整前后的接收效率的变化,是一个非常重要的问题.本文结合“FAST”工作的实际情况,提出合理假设,计算得到理想抛物面的方程,在此之后设计了调节算法,建立了反射面板的调节模型,最后计算了反射面板调整前后的接收比的大小,解决了题目所提出的问题,为“FAST”反射面板的调整及接收效率的评估提供了理论依据.

针对问题 1,当待观测天体位于正上方时,通过求解优化问题,限制条件为抛物线的焦点固定,目标是让抛物面上的点与基准球面最接近,计算得到理想抛物面的焦距 $f = 0.4672R$,并据此写出理想抛物面的方程为 $x^2 + y^2 - 561.3875z - 1.6884 \times 10^5 = 0$.同时,作出了基准球面与理想抛物面的对比图,分析了结果的合理性.

针对问题 2,当待观测天体有一定的仰角时,首先根据 $f = 0.4672R$,写出此时理想抛物面的方程,并计算得到理想抛物面的顶点坐标为 $(-49.3792, -36.9336, -294.3713)$;接下来在伸缩的长度介于 -0.6m 到 0.6m 之间时,让主索节点尽量接近理想抛物面,同时要求相邻主索节点之间的距离改变量不超过 0.07% ,通过运用相应的算法对主索节点的位置进行多次调整,求解得到主索节点的坐标;最后根据促动器径向伸缩的特性,在主索节点的坐标的基础上计算得到促动器的伸缩量.同时,通过取特殊值,及对节点的位置坐标进行分析,分析了理想抛物面的方程和调整方案的合理性.问题的结果保存在 result.xlsx 文件中.

针对问题 3,在问题 2 的基础上,首先建立了理想球面的反射模型,计算得到基准球面的接收比约为 0.67% ;接下来建立了球面板上的反射模型,在给定了每个面板三个顶点的坐标的基础上,工作抛物面的接收比约为 3.55% .计算的结果表明,工作抛物面的接收比增大了将近 5.3 倍,说明节点位置的调整有效地提高了接收的效率.同时,对面板赋予相同的曲率,对接收效率的提高具有良好的推动作用.最后,在反射模型的基础上,对理想抛物面的焦距和工作抛物面的节点坐标进行调整,当焦距 $f = 0.468R$ 时,可以将接收比进一步提高到 4.99% ,提高到原来的 1.4 倍.

关键词: 全局优化,反射面板调节,理想抛物面,球面板反射模型,接收比.

一 问题背景与重述

1.1 问题背景

500 米口径球面射电望远镜 (Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope, FAST) 也被称为中国天眼, 是世界上单口径最大、灵敏度最高的射电望远镜. 对于望远镜而言, 为了清晰地观测到某个方位的天体, 通常需要在每次观测的时候调整位置和方向. 然而, “FAST” 依地形而建, 口径为 500 米, 不可能做到调整位置. 因此, 中国科学家们提出了创造性的设计: “FAST” 由四千多块反射面板组装而成 (如图1.1(a) 所示), 通过调整 “FAST” 上反射面板的位置和角度, 可以在局部形成 300 米口径的工作抛物面, 便于进行观测.

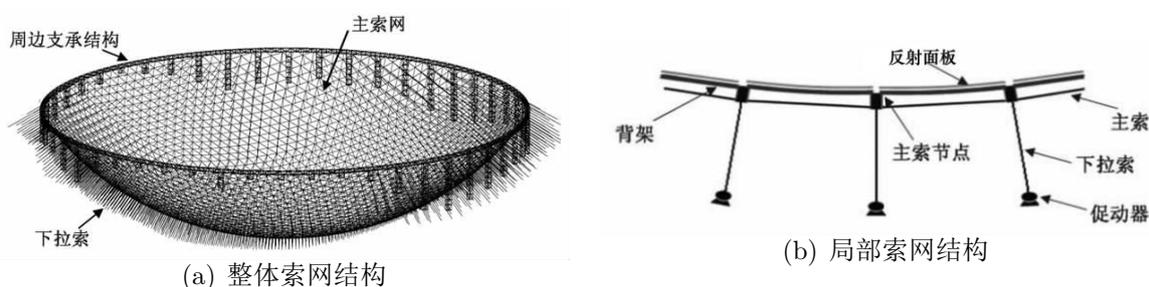


图 1.1: “FAST” 的索网结构

主动反射面可以分为基准态和工作态. 处于基准态时, 反射面为半径约 300 米、口径为 500 米的球面; 处于工作态时, 反射面的局部被调整为一个 300 米口径的工作抛物面, 根据抛物线的光学性质, 接收的电磁波信号可以被反射到抛物面的焦点上, 也即接收信号的馈源舱上. 将反射面调节为工作抛物面是这项技术的关键, 这是通过下拉索与促动器配合来完成的 (如图1.1(b) 所示). 通过促动器径向伸缩, 可以调整主索点的位置, 从而形成工作抛物面.

1.2 问题重述

本题目正是基于 “FAST” 反射面板调整的背景, 需要解决如下问题:

问题 1: 当待观测天体位于正上方时, 结合反射面板调节因素, 确定理想抛物面;

问题 2: 当待观测天体位于 $\alpha = 36.795^\circ, \beta = 78.169^\circ$ 时, 确定理想抛物面, 并建立反射面板调节模型, 使反射面尽量贴近理想抛物面;

问题 3: 基于问题 2 的调整方案, 计算接收比, 并与基准反射球面的接收比作比较.

二 问题分析

2.1 问题 1 的分析

问题 1 考虑待观测天体位于基准球面正上方的情形, 要求确定**理想抛物面**. 此时抛物面的焦点为 z 轴上的一个定点, 通过让抛物面上的点尽量接近球面, 原问题便转化为一个在限制条件下的优化问题. 可以求解得到理想抛物面的焦距 f . 从而确定了理想抛物面的方程.

2.2 问题 2 的分析

问题 2 考虑待观测天体有一定的方位角和仰角的情形. 首先需要确定**理想抛物面**, 通过问题 1 中所得到的焦距, 修改理想抛物面的焦点的位置, 再根据抛物面上一点到焦点和到准面的距离相等, 列出方程计算, 即可得到问题 2 中的理想抛物面的方程. 之后便容易计算题目所要求的理想抛物面的顶点坐标. 其次需要建立**反射面板调节模型**. 要求反射面尽量贴近理想抛物面, 同时相邻节点之间的距离几乎不发生改变, 需要我们确定一种调整方案, 在保持主索长度不变的情况下, 让主索节点尽量接近理想抛物面. 接下来, 通过计算每个节点的位移, 可以确定每个促动器径向伸缩的长度.

2.3 问题 3 的分析

问题 3 需要在问题 2 的基础上, 计算调节前后的接收比. 首先需要计算**基准球面的接收比**. 考虑到球面是对称的, 不妨设天体在基准球面的正上方, 并且认为球面是完美的球面, 这样可以方便地计算出基准球面的接收比. 其次需要在问题 2 的调整方案的基础上, 计算**工作抛物面的接收比**. 工作抛物面是在基准球面的基础上调整得到的, 由许多三角形面板组成. 假设每一块反射面板都是相同的球面, 通过考虑在面板上某点处的反射光线, 计算反射电磁波与馈源舱平面的交点的坐标, 再计算交点与馈源舱中心的距离. 如果距离小于 0.5m , 则认为电磁波被吸收. 在建立了接收比的计算模型之后, 还可以对其进行**优化** (如图2.1所示), 以获得**最大接收比**为目的, 调整焦距或工作抛物面.

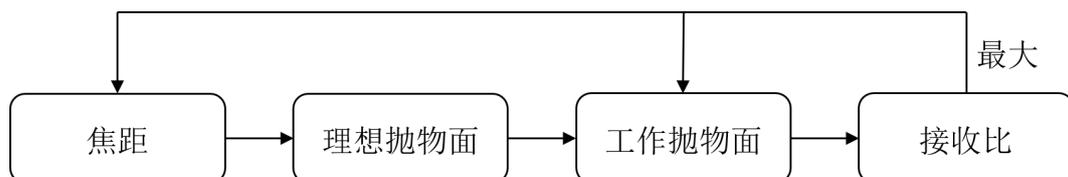


图 2.1: 解决问题的思路

三 模型准备

3.1 模型假设

假设 1: 假设坐标原点、促动器与其对应的主索节点是共线的.

理由: 根据题目要求, 促动器的伸缩为径向伸缩, 下拉索长度固定; 同时根据附件 2 的数据计算得到, 促动器方向与径向最大偏差程度为 0.0078%, 可以忽略.

假设 2: 假设反射面板可以近似为光滑的无孔球面, 在变位时不会被挤压、拉扯而变形, 同时忽略反射面板之间的缝隙.

理由: 根据题目要求, 基准态下每一块面板都是球面的一部分, 假设面板为球面符合实际的情况; 反射面板上开有许多用于透漏雨水的小孔, 但小孔的直径较小, 反射; 反射面板间有一定缝隙, 防止反射面板变形, 但缝隙较小, 可以忽略不计.

假设 3: 假设电磁波信号与反射信号为直线传播, “FAST” 能够接收充足的电磁波信号.

理由: “FAST” 接收的电磁波主要为长波长的无线电波, 具有良好的穿透特性, 易于发生明显的衍射, 可以在发射信号的被观测天体经过长距离运输到地表后仍具有良好的信号强度.

3.2 符号说明

表 3.1: 符号说明

符号	说明	单位
f	理想抛物面的焦距, 也即焦点到准线的距离.	m
l	理想抛物面的焦距与基准球面的半径之比.	无量纲
d_i	第 i 个促动器的伸缩量, 正负表示方向.	m
$s(i, j)$	第 i 个节点与第 j 个节点之间的距离.	m
η	接收比, 也即有效区域接收到的反射信号与反射面的反射信号之比.	无量纲

3.3 数据的预处理

3.3.1 照明区域的确定

设天体 S 的方位角 $\alpha = 36.795^\circ$, 仰角 $\beta = 78.169^\circ$. 根据题意, 照明区域的口径为 300m, 而基准球面的半径 $R = 300.4\text{m}$, 因此照明区域所对的圆心角约为 60° . 根据 α 和

β , 计算得到照明区域的中心 A_0 的坐标为

$$\begin{cases} x_0 = -R \cos \alpha \cos \beta, \\ y_0 = -R \sin \alpha \cos \beta, \\ z_0 = -R \sin \beta. \end{cases}$$

接下来, 对于基准球面上的任意一点 $A(x, y, z)$, 计算 \overrightarrow{CA} 与 $\overrightarrow{CA_0}$ 的夹角大小. 如果夹角小于 30° , 则 A 在照明区域内, 反之则 A 不在照明区域内.

3.3.2 相邻节点的判断与距离的计算

首先根据附件 1 中所有节点的坐标, 可以计算得到任意两个节点之间的距离, 并设第 i 个节点与第 j 个节点之间的距离为 $s(i, j)$. 根据数据的特点, 选取 12.37855m 作为临界值, 如果 $s(i, j) > 12.37855\text{m}$, 则认为第 i 个节点与第 j 个节点不相邻, 并为了方便, 标记 $s(i, j) = 0$. 在经过调整之后, 相邻的节点仍然相邻, 而不相邻的节点仍然不相邻.

3.3.3 通过节点找到所有三角形反射面板

假设反射面板可以近似为无孔球面, 在判断出节点相邻, 并计算出相邻节点的距离之后, 我们还可以利用上面所得的数据, 判断哪些节点可以构成三角形. 对于第 i 个节点、第 j 个节点和第 k 个节点, 如果

$$\begin{cases} s(i, j) \neq 0, \\ s(j, k) \neq 0, \\ s(k, i) \neq 0, \end{cases}$$

则它们两两相邻, 认为它们构成一个三角形面板, 并记录这个三角形的三个节点的坐标.

四 模型的建立与求解

4.1 模型 1: 理想抛物面的确定

以圆心 C 为坐标原点, 建立空间直角坐标系 $Oxyz$. 根据附件 1 数据计算得到, 基准球面的半径 $R = 300.4\text{m}$. 设焦距比 $k = 0.466$, 则基准球面与焦面的半径差 $F = kR$, 焦面的半径为 $(1 - k)R$. 根据基准球面的口径为 500 米, 容易写出基准球面的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad \text{其中 } x^2 + y^2 \leq (250\text{m})^2.$$

为了解决问题, 我们需要结合考虑反射面板的调节因素, 确定理想抛物面方程. 根据题目条件, 促动器的径向伸缩范围为 -0.6 米到 0.6 米. 为了方便调整, 我们需要找的理想抛物面为**焦点在焦面上, 且其上的点最接近基准球面的抛物面**. 设理想抛物面的焦距为 f , 在确定理想抛物面的过程可以分为两步:

- 首先, 考虑到球面是对称的, 不妨设待观测天体位于基准球面正上方, 这便是问题 1 的情形. 在这里, 我们可以得到理想抛物线的**焦距**;
- 其次, 对于问题 2 中的情形, 也即待观测天体有一定的方位角和仰角的情形, 根据上面求得理想抛物面的焦距, 可以得到此时对应的理想抛物面.

4.1.1 问题 1 中理想抛物面的确定

首先, 设待观测天体位于基准球面正上方, 也即 $\alpha = 0, \beta = 90^\circ$. 根据对称性, 只需要考虑 xOz 平面上的情形, 此时抛物面和球面的截线为抛物线和圆. 抛物线的焦点坐标为 $(0, 0, (k-1)R)$, 口径为 300 米, 则 xOz 平面上抛物线的方程为

$$z = \frac{x^2}{4f} + (k-1)R - f, \quad \text{其中 } -150\text{m} < x < 150\text{m}.$$

根据圆的几何性质, 计算得抛物线上一点 $(x, 0, z)$ 到圆上的点的最小距离

$$d = R - \sqrt{x^2 + z^2}.$$

为了方便使用 MATLAB 求解问题, 我们取分点 $-150\text{m} = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 150\text{m}$, 其中 n 充分大, 则所求解的问题为

$$\min_f \sum_{i=0}^n d_i^2, \quad \text{使得} \begin{cases} d_i = R - \sqrt{x_i^2 + z_i^2}, \\ z_i = \frac{x_i^2}{4f} + (k-1)R - f. \end{cases}$$

据此可以求出抛物线的焦距 $f = 140.3456\text{m}$, 这也是理想抛物面的焦距. 记 $l = \frac{f}{R} = 0.4672$, 则问题 1 中的**理想抛物面方程**为

$$x^2 + y^2 - 4lR \cdot z + 4l(k-1-l)R^2 = 0. \quad (4.1)$$

其中 $R = 300.4\text{m}$ 为基准球面的半径, $k = 0.466$ 为焦径比.

4.1.2 问题 2 中理想抛物面的确定

设天体 S 的方位角 $\alpha = 36.795^\circ$, 仰角 $\beta = 78.169^\circ$, 根据焦面的半径为 $(k - 1)R$, 可以得到焦点 P 的坐标为

$$\begin{cases} x_P = (k - 1)R \cdot \cos \alpha \cos \beta, \\ y_P = (k - 1)R \cdot \sin \alpha \cos \beta, \\ z_P = (k - 1)R \cdot \sin \beta. \end{cases}$$

抛物面的对称轴为 CP 所在的直线, 焦距 $f = lR$. 据此求出抛物面的准面方程为

$$\Pi : \cos \alpha \cos \beta \cdot x + \sin \alpha \cos \beta \cdot y + \sin \beta \cdot z = (k - 1 - 2l)R.$$

根据抛物面的性质, 其上任意一点 (x, y, z) 到焦点 P 和到准面 Π 的距离相等, 因此

$$\begin{aligned} & |\cos \alpha \cos \beta \cdot x + \sin \alpha \cos \beta \cdot y + \sin \beta \cdot z - (k - 1 - 2l)R| \\ &= \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}, \end{aligned}$$

对上式整理可得, 问题 2 中的理想抛物面方程为

$$\begin{aligned} & (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 1) \cdot x^2 + (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - 1) \cdot y^2 + (\sin^2 \beta - 1) \cdot z^2 \\ & + 2 \cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \beta \cdot xy + 2 \sin \alpha \cos \beta \sin \beta \cdot yz + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \beta \cdot zx \\ & + 4lR \cos \alpha \cos \beta \cdot x + 4lR \sin \alpha \cos \beta \cdot y + 4lR \sin \beta \cdot z \\ & - 4l(k - l - 1)R^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $R = 300.4\text{m}$ 为基准球面的半径, $k = 0.466$ 为焦径比, $l = 0.4672$. 另外, 可以计算得到理想抛物面的顶点坐标为

$$\begin{cases} x_P = (k - l - 1)R \cdot \cos \alpha \cos \beta, \\ y_P = (k - l - 1)R \cdot \sin \alpha \cos \beta, \\ z_P = (k - l - 1)R \cdot \sin \beta. \end{cases} \tag{4.3}$$

4.2 模型 2: 反射面板调节模型

4.2.1 检验照明区域是否超出反射面区域

在建立反射面板调节模型之前, 首先需要检验照明区域是否会超出反射面的区域. 如图4.1所示, 设此时待观测天体的仰角为 β_0 , 在此考虑反射面沿着方位角方向的截面. 设 P_1 为反射面的一个端点, $|OP_1| = 250\text{m}$, $|CP_1| \approx 300\text{m}$, 因此

$$|CO| = \sqrt{|CP_1|^2 - |OP_1|^2} = 50\sqrt{11}\text{m}.$$

同时, 根据照明区域的口径为 300m, 知 $|P_1P_2| \geq 150\text{m}$. 考虑照明区域恰好不超出反射面区域的临界情况, 则 $|P_1P_2| = 150\text{m}$, 因此

$$|CP_2| = \sqrt{|CP_1|^2 - |P_1P_2|^2} = 150\sqrt{3}\text{m}.$$

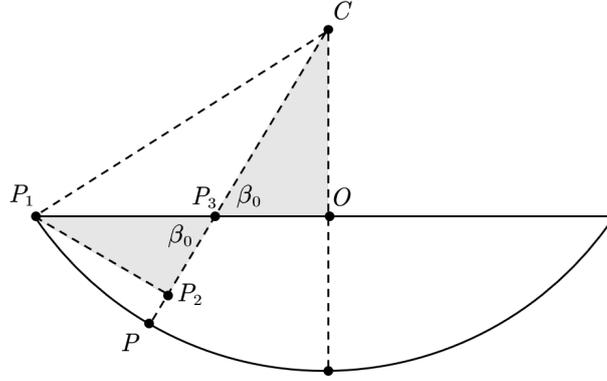


图 4.1: 照明区域的检验

在三角形 COP_3 中, $\angle COP_3 = 90^\circ$, $\angle CP_3O = \beta_0$; 在三角形 $P_1P_2P_3$ 中, $\angle P_1P_2P_3 = 90^\circ$, $\angle P_1P_3P_2 = \beta_0$. 从而 $\triangle COP_3 \sim \triangle P_1P_2P_3$, 根据相似比得

$$\frac{|P_1P_2|}{|CO|} = \frac{|P_1P_3|}{|CP_3|} = \frac{|P_2P_3|}{|OP_3|} = \frac{3\sqrt{11}}{11},$$

又 $|P_1P_3| + |OP_3| = |OP_1| = 250\text{m}$, $|P_2P_3| + |CP_3| = |CP_2| = 150\sqrt{3}\text{m}$, 据此解得临界情况下的仰角

$$\beta_0 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{33} + 5}{12}\right) \approx 63.557^\circ, \quad (4.4)$$

问题 2 中天体的仰角 $\beta = 78.169^\circ > \beta_0$, 因此问题 2 中的照明区域不会超出反射区域.

4.2.2 主索节点位置与促动器伸缩的优化模型

通过促动器的径向伸缩, 可以调节主索节点的位置, 从而让反射面接近理想抛物面. 考虑到促动器、主索节点和坐标原点是共线的, 我们可以先考虑调整主索节点的位置, 但是在调节的过程中, 需要满足以下几个要求:

- 一方面, 需要在 $\pm 0.6\text{m}$ 的范围内, 让主索节点及面板的重心接近理想抛物面;
- 另外一方面, 还要求相邻的节点之间的距离形变不能超过 0.07%.

为此设计的算法如算法1所示. 在算法1中, 首先计算得到初始状态下的所有的节点和三角形面板的重心到抛物面的距离的平方和 ST . 接下来, 遍历主索节点, 并逐段调整伸缩

的长度. 判断相邻节点之间的距离变化是否超过 0.07%, 如果距离过大, 则跳过本次调整; 在调整过后, 再次计算照明区域内上的所有的节点及重心到抛物面的距离的平方和, 并与之前的结果进行对比. 若距离的平方和变小, 则保存本次结果, 直到程序运行结束.

在得到了调整后的节点的位置之后, 设第 i 个主索节点的原始坐标为 (x_i, y_i, z_i) , 经过调整后的坐标为 (x'_i, y'_i, z'_i) , 考虑到坐标原点、促动器与主索节点是共线的, 因此主索节点变化的距离, 就是促动器伸缩的距离. 从而, 在得到了主索节点的位置的调节方案之后, 就可以得到促动器伸缩的调节方案.

算法 1: 问题 2 中主索节点位置与促动器伸缩的调整方案

```

data 附件 1: 主索节点的坐标与编号;
计算相邻两点之间的距离  $s_{old}(i, j)$ ;
计算所有的节点和三角形面板的重心到抛物面的距离的平方和  $ST$ ;
for 照明区域内的第  $i$  个节点 do
    for  $-0.6\text{m}$  到  $0.6\text{m}$  之间的伸缩长度  $d_i$  do
        if 第  $i$  个节点调整后与相邻的点之间的距离变化超过 0.07% then
            | continue
        else
            | 计算此时所有的节点到抛物面的距离的平方和  $st_1$ ;
            | 计算此时所有的三角形面板的中心到抛物面的距离的平方和  $st_2$ ;
            | if  $st_1 + st_2 < ST$  then
            | |  $ST = st_1 + st_2$ ;
            | | 保存本次调整后节点的坐标  $(x'_i, y'_i, z'_i)$ ;
            | | 保存本次调整的伸缩长度  $d_i$ ;
            | else
            | | continue
            | end
        end
    end
end
output 调整后的照明区域内的节点的坐标  $(x'_i, y'_i, z'_i)$ ;
output 促动器的伸缩长度  $d_i$ ;

```

编写程序计算, 即可得到主索节点位置与促动器伸缩的调节方案.

4.3 模型 3: 接收比的计算模型

所谓的接收比,指的是馈源舱有效区域接收到的反射信号与 300 米口径内反射面的反射信号之比,可以用来刻画反射的有效率.为了解决问题 3,我们首先需要建立模型,再分别计算出基准球面的接收比与工作抛物面的接收比,最后对比这两个接收比的大小.理论上,理想抛物面的接收比应该为 100%,工作抛物面的接收比应该比基准球面的接收比更高,但是不高于理想抛物面的接收比.

4.3.1 基准球面的反射模型

作为对比,我们首先计算基准球面的接收比,此时认为反射面是一个理想球面.

考虑到球面是对称的,只要照明区域不超过工作区域,仰角的改变不会影响接收比的大小.因此,我们在建模和编程的过程中,不妨设仰角 $\beta = 90^\circ$.此时电磁波垂直入射,馈源舱 P 位于 z 轴上,计算起来相对较为方便.

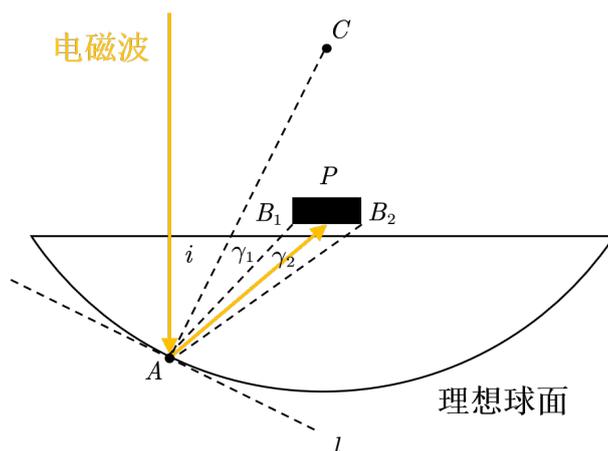


图 4.2: 电磁波在理想球面上的反射

作出电磁波所在平面的截面图如图4.2所示,其中馈源舱 P 的左下角为 B_1 ,右下角为 B_2 .设电磁波入射后在理想球面的 A 点处发生反射, A 点处的切线为 l ,电磁波的入射角(也即入射方向和 l 的垂线方向的夹角)为 i ,则经过反射后的反射角也为 i .

连接 AB_1 与 AB_2 ,并记 $\angle CAB_1 = \gamma_1$, $\angle CAB_2 = \gamma_2$,根据几何关系判断得到,只要 $\gamma_1 \leq i \leq \gamma_2$,电磁波就可以被馈源舱吸收.以下均匀地取球面内的 n 个点,并设有 m 个点反射的电磁波可以被吸收,当 n 充分大时,计算出接收比 $\eta = \frac{m}{n}$.从而,设计算法2来计算理想球面的接收比.

算法 2: 问题 3 中理想球面的接收比的计算

n 为照明区域内取的点数, $m = 0$;

for 照明区域内的点 A **do**

 计算对应的 B_1 与 B_2 的坐标;

 计算对应的 i 、 γ_1 与 γ_2 的值;

if $\gamma_1 \leq i \leq \gamma_2$ **then**

 | $m = m + 1$;

end

end

计算接收比 η ;

output 接收比 η ;

4.3.2 球面板的反射模型

接下来, 我们再来计算工作抛物面的接收比, 其是由一系列的球面板组成的. 根据问题 2 计算的结果, 我们可以得到工作抛物面的每个节点的位置, 从而三角形反射面板的三个顶点是确定的, 只需要对一个给定的反射面板建模即可.

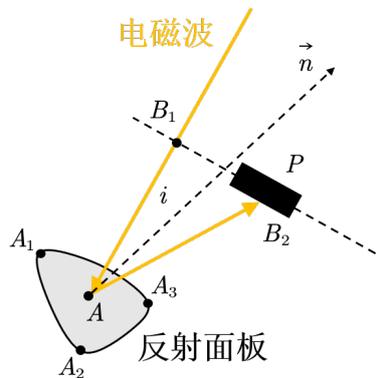


图 4.3: 电磁波在某个三角形面板上的反射

设天体 S 的方位角 $\alpha = 36.795^\circ$, 仰角 $\beta = 78.169^\circ$, 作出电磁波所在平面的截面图如图4.3所示. 设 k 为焦径比, R 为基准球面的半径, 则此时的馈源舱 P 的坐标为

$$\begin{cases} x_P = (k - 1)R \cdot \cos \alpha \cos \beta, \\ y_P = (k - 1)R \cdot \sin \alpha \cos \beta, \\ z_P = (k - 1)R \cdot \sin \beta. \end{cases}$$

设反射面板的三个节点为 A_1 、 A_2 和 A_3 , 电磁波在反射面板上的 $A(x_0, y_0, z_0)$ 处发生反

射, 首先求出面板上该点处的法向量 \mathbf{n}_1 , 再令

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \times (1, 0, 0), \quad \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2,$$

则 \mathbf{n}_1 、 \mathbf{n}_2 和 \mathbf{n}_3 两两垂直, 记 $\mathbf{A} = [\mathbf{n}_1^T, \mathbf{n}_2^T, \mathbf{n}_3^T]$, 则 \mathbf{A} 是从 $(1, 0, 0)$ 到 \mathbf{n}_1 的正交矩阵. 设 \mathbf{n}' 是面板调整之后的法向量, 用同样的方法可以得到 $(1, 0, 0)$ 到 \mathbf{n}' 的正交矩阵 \mathbf{B} , 那么从 \mathbf{n} 到 \mathbf{n}' 的正交矩阵为 $\mathbf{Q} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$, 进而

$$\mathbf{n}' = \mathbf{Q}\mathbf{n} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{n}.$$

接下来, 根据电磁波入射的方向向量 $\mathbf{a} = (-\cos\alpha\cos\beta, -\sin\alpha\cos\beta, -\sin\beta)$, 设入射电磁波与反射电磁波分别与馈源舱所在平面交于 B_1 与 B_2 . 可以写出直线 AB_1 的方程为

$$L_{AB_1} : \frac{x - x_0}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\sin\beta},$$

再写出馈源舱所在平面的方程为

$$\Pi_P : \cos\alpha\cos\beta(x - x_P) + \sin\alpha\cos\beta(y - y_P) + \sin\beta(z - z_P) = 0,$$

记 $M = \cos\alpha\cos\beta(x_0 - x_P) + \sin\alpha\cos\beta(y_0 - y_P) + \sin\beta(z_0 - z_P)$, 则

$$\Pi_P : \cos\alpha\cos\beta(x - x_0) + \sin\alpha\cos\beta(y - y_0) + \sin\beta(z - z_0) = M,$$

联立 L_{AB_1} 与 Π_P 的方程, 解得

$$\begin{cases} x_{B_1} = x_0 + M \cos\alpha\cos\beta, \\ y_{B_1} = y_0 + M \sin\alpha\cos\beta, \\ z_{B_1} = z_0 + M \sin\beta. \end{cases}$$

从而 $\overrightarrow{AB_1} = (M \cos\alpha\cos\beta, M \sin\alpha\cos\beta, M \sin\beta)$. 设 \mathbf{n} 与 $\overrightarrow{AB_1}$ 的夹角为 i , 则 $\cos i = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{a}|}$, 根据反射的条件得 $\overrightarrow{AB_1}$ 与 $\overrightarrow{AB_2}$ 关于 \mathbf{n} 对称, 因此反射电磁波的方向向量 $\mathbf{a}' = 2\mathbf{n} - \overrightarrow{AB_1} = (a'_1, a'_2, a'_3)$, 可以写出直线 AB_2 的方程为

$$L_{AB_2} : \frac{x - x_0}{a'_1} = \frac{y - y_0}{a'_2} = \frac{z - z_0}{a'_3}.$$

联立 L_{AB_1} 与 Π_P 的方程, 解得

$$\begin{cases} x_{B_2} = x_0 + \frac{a'_1}{(a'_1)^2 + (a'_2)^2 + (a'_3)^2} \cdot \frac{M}{\cos 2i}, \\ y_{B_2} = y_0 + \frac{a'_2}{(a'_1)^2 + (a'_2)^2 + (a'_3)^2} \cdot \frac{M}{\cos 2i}, \\ z_{B_2} = z_0 + \frac{a'_3}{(a'_1)^2 + (a'_2)^2 + (a'_3)^2} \cdot \frac{M}{\cos 2i}. \end{cases}$$

因此, 只要 B_2 点的距离与 P 点的距离之差小于 0.5m , 也即

$$(x_{B_2} - x_P)^2 + (y_{B_2} - y_P)^2 + (z_{B_2} - z_P)^2 \leq (0.5\text{m})^2,$$

就可以认为电磁波可以被馈源舱接收. 取照明区域内的 n 个点, 并设有 m 个点反射的电磁波可以被吸收, 那么接收比 $\eta = \frac{m}{n}$. 从而, 设计算法3来计算接收比.

算法 3: 问题 3 中工作抛物面的接收比的计算

input 工作抛物面内的所有节点的坐标.

n 为照明区域内取的点数, $m = 0$;

for 三角形反射面板 $A_1A_2A_3$ **do**

for 三角形反射面板上的点 A **do**

 计算该点处的法向量 \vec{n} ;

 计算对应的 B_1 与 B_2 的坐标;

if $(x_{B_2} - x_P)^2 + (y_{B_2} - y_P)^2 + (z_{B_2} - z_P)^2 \leq (0.5\text{m})^2$ **then**
 | $m = m + 1$;

end

end

end

计算接收比 η ;

output 接收比 η ;

4.3.3 基于反射模型的工作抛物面的调整

在建立了反射模型之后, 我们可以继续调整理想抛物面的焦距及主索节点的坐标, 以最大化工作抛物面的接收比 (如图4.4所示).

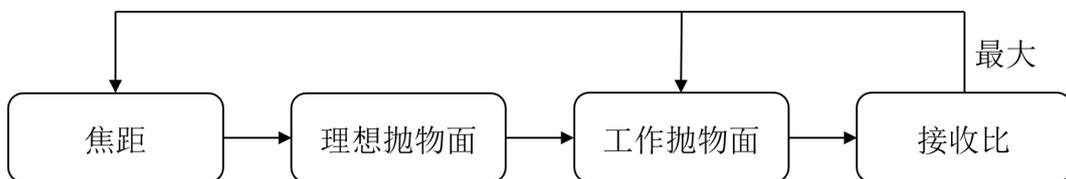


图 4.4: 基于反射模型的工作抛物面的调整思路

通过遍历理想抛物面的焦距 f , 得到对应的理想抛物面的方程, 在此基础上利用我们所建立的反射面板调节模型, 进一步调整工作抛物面, 再次计算此时的接收比. 若接收比比之前所计算的最大的接收比还要大, 则记录此时的焦距 f 和节点的坐标.

五 结果的分析与检验

5.1 问题 1 的结果

在问题 1 中, 我们定义理想抛物面为焦点在焦面上, 且其上的点最接近基准球面的抛物面. 设 $k = \frac{F}{R} = 0.466$ 为焦径比. 通过固定抛物面的焦点, 改变抛物面的焦距 f , 以抛物面上的点到基准球面的距离的平方和为目标函数, 求解优化问题, 得到了理想抛物面的焦距 $f = 140.3456\text{m}$, 焦距与基准球面的半径之比 $l = \frac{f}{R} = 0.4672$. 进而计算出理想抛物面的方程 (也即方程 (4.1)) 为

$$x^2 + y^2 - 4lR \cdot z + 4l(k - 1 - l)R^2 = 0,$$

代入数值计算, 得到问题 1 所求的理想抛物面的方程为

$$x^2 + y^2 - 561.3875z - 1.6884 \times 10^5 = 0. \quad (5.1)$$

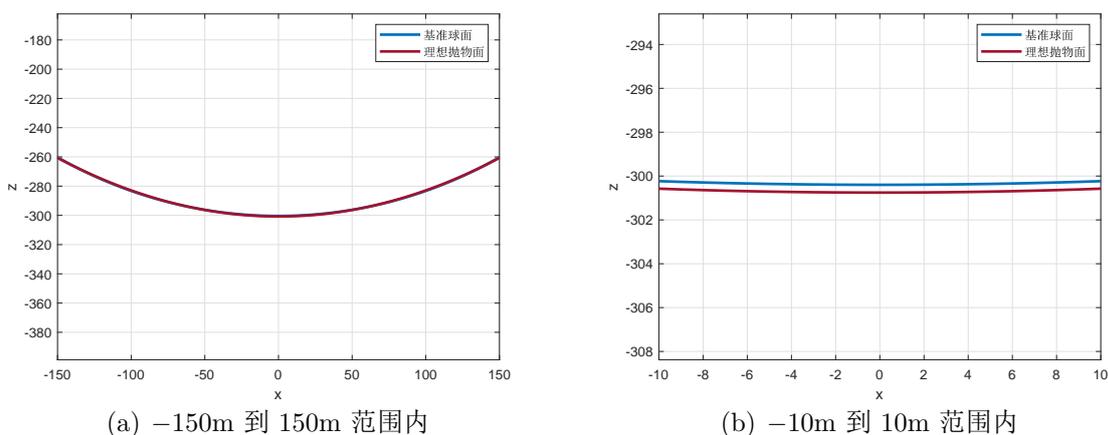


图 5.1: 问题 1 中的结果的检验

首先对 l 的值进行检验, 发现 $l \approx k$, 因此抛物面与基准球面较为接近. 其次对方程 (5.1) 进行检验, 计算得到在 300m 口径的范围内, 理想抛物面上的点到球面的最大距离为 $0.3592\text{m} < 0.6\text{m}$, 同时绘制出 xOz 平面上的基准球面和理想抛物面的截面 (如图 5.1 所示), 发现两者几乎重合, 因此问题 1 的理想抛物面的方程是合理的.

5.2 问题 2 的结果

首先, 我们确定了问题 2 的理想抛物面的方程, 此时天体的位置由方位角 α 和仰角 β 给出. 在问题 1 的基础上, 我们得到 $l = \frac{f}{R} = 0.4672$, 据此写出理想抛物面的方程

(4.2), 并借助方程 (4.3), 计算得到理想抛物面的顶点坐标为

$$\begin{cases} x_P = (k - l - 1)R \cdot \cos \alpha \cos \beta = -49.3792\text{m}, \\ y_P = (k - l - 1)R \cdot \sin \alpha \cos \beta = -36.9336\text{m}, \\ z_P = (k - l - 1)R \cdot \sin \beta = -294.3713\text{m}. \end{cases}$$

在此, 为了检验方程 (4.2) 的正确性, 取 $\alpha = 0, \beta = 90^\circ$, 则方程变为

$$x^2 + y^2 - 4lR \cdot z + 4l(k - l - 1)R^2 = 0,$$

这是待观测天体位于基准球面正上方时的理想抛物面的方程, 与方程 (4.1) 相符. 因此可以认为问题 2 的理想抛物面的方程是合理的. 同时, 为了对比两个问题中的理想抛物面, 画出图像如 5.2 所示.

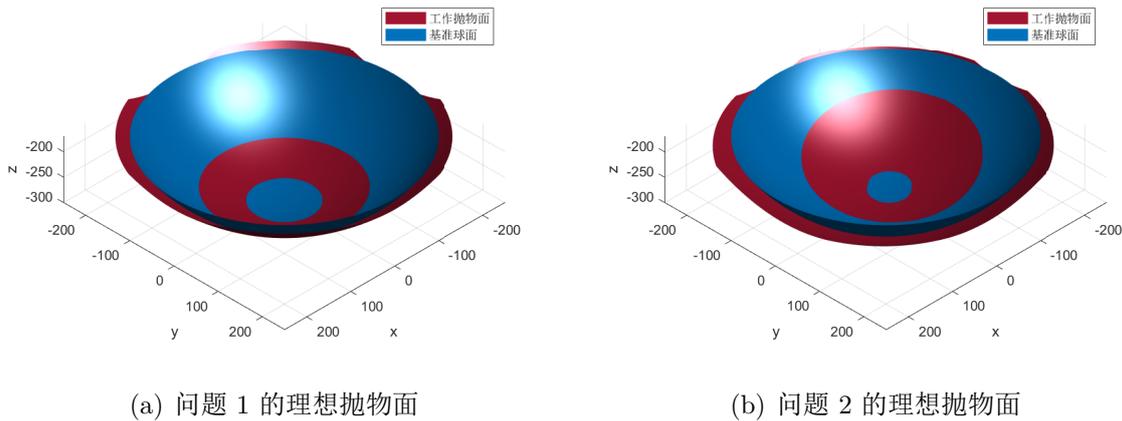


图 5.2: 理想抛物面与基准球面示意图

接下来, 我们判断了这种情形下天体仰角所对应的照明区域是否会超出反射区域. 通过几何关系, 根据方程 (4.4), 在照明区域恰好不超过反射区域的临界情况下, 计算得到临界仰角 $\beta_0 \approx 63.557^\circ$. 又根据 $\beta = 78.169^\circ > \beta_0$, 我们得到的结论是问题 2 中的照明区域不会超出反射区域.

最后, 利用算法 1 的调整方案, 计算了调整后的节点坐标、相邻节点之间的距离和每个促动器的伸缩长度, 并将结果保存到 result.xlsx 文件中. 最终的调整结果如图 5.3 所示. 为了检验调整的结果, 计算得到相邻节点距离的相对变化最大为 $0.0647\% < 0.07\%$, 同时促动器的伸缩量最大为 0.3612m , 最小为 -0.6m , 均落于 -0.6m 到 0.6m 之间, 均方根误差为 0.3633m , 满足题目的要求. 因此问题 2 中最终的调整方案是合理的.

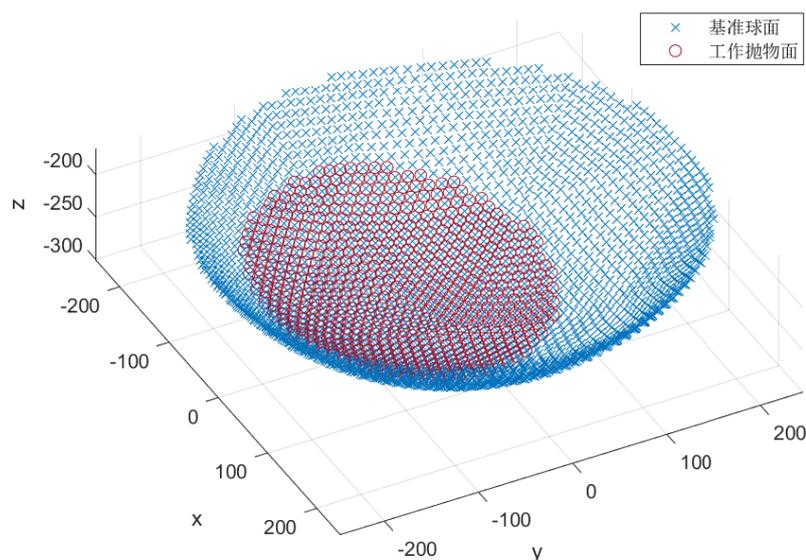


图 5.3: 工作抛物面与基准球面示意图

5.3 问题 3 的结果

对于由三角形面板组成的基准球面和工作抛物面, 附件 1 给出了基准球面的节点坐标, 通过问题 2 的策略, 我们也可以得到工作抛物面的节点坐标. 考虑电磁波以一定的方位角和仰角入射的情形, 此时我们通过计算入射电磁波与反射电磁波的方向向量, 可以得到电磁波反射后与馈源舱所在平面的交点 B_2 的坐标. 分别计算得到基准球面的接收比大约为 0.67%, 而工作抛物面的接收比大约为 3.55%.

分析计算的结果, 基准球面并不能起到会聚电磁波的作用, 同时接收比也较小, 使观测的效率极低. 这也说明了调整面板的重要性. 在将基准球面调整为工作抛物面之后, 我们把接收比增大了大约 5.3 倍, 极大地提高了电磁波的接收效率.

另外, 为了检验问题的结果, 不限制节点之间距离的变化, 考虑所有的节点都在抛物面上的情形, 使节点最接近抛物面, 计算得到接收比大概为 5.91%, 根据

$$0.67\% < 3.55\% < 5.91\%,$$

我们可以认为模型是较为合理的. 在这里为了对比, 除了计算出反射面为球面的情况下的接收比以外, 还尝试将反射平面视为三角形平面, 再编写程序计算工作抛物面的接收比. 经过计算得到, 此时工作抛物面的接收比为 $0.81\% < 3.55\%$, 因此将反射面近似为平面是不合理的.

最后, 作为模型的推广, 我们基于反射膜性, 对工作抛物面进行调整. 以最大化接收比为目标, 调整理想抛物面的焦距和工作抛物面的节点, 最终调整得到的抛物面的焦距

$f = 0.468R$, 此时的接收比达到了 4.99%. 在经过调整之后, 工作抛物面的接收比有一定的增长.

六 模型的优缺点分析

6.1 模型的稳定性分析

首先是对于理想抛物面的方程的分析. 设基准球面的半径为 R , 则理想抛物面的焦距 $f = lR$, 其中 $l = 0.4672$.

- 若修改 R 的值, 尽管 f 也随着 R 改变, 但是 $l = \frac{f}{R}$ 始终不变. 这是因为随着图像成比例放大, 抛物面的焦距也会按相同的比例放大;
- 若修改 l 的值, 可以画出此时 Δz 的变化. 如表6.1与图6.1所示. 可以发现差值最大不超过 1.5m, 但是考虑到伸缩的最大长度为 0.6m, 因此模型对 l 的精度要求较高.

表 6.1: 修改 l 的值时均方根的变化

l	0.464	0.465	0.466	0.467	0.468
均方根/m	59.9604	42.5061	25.9566	13.9780	19.2589

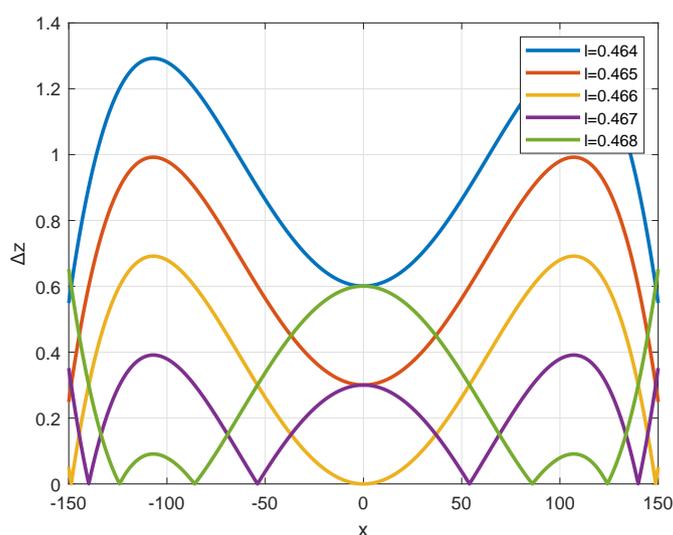


图 6.1: 修改 l 的值时 Δz 的变化

其次是对于反射面板调节模型的分析. 在调节方案中, 设置了节点径向伸缩最大不超过 0.6m, 并且相邻节点之间的距离最大不超过 0.07%, 这保证了最终结果的稳定.

最后是对接收比的计算模型的分析. 接收比的计算依赖于点的选取, 若在照明区域内取的点数 n 较大, 则接收比会更精确. 因此, 在计算的过程中, 我们应该选取尽量多的点, 以得到准确的结果.

6.2 模型的优点

纵观全文, 我们所建立的数学模型具有如下的优点.

- 在确定理想抛物面时, 灵活利用了“变”与“不变”, 注意到随着天体方位变化, 理想抛物面的焦距是一个不变量, 从而假设天体位于正上方, 极大简化了问题; 另外, 在确定问题 2 中的理想抛物面时, 采取了纯理论推导的方式, 得到了理想抛物面的方程, 避免了数值计算带来的误差, 也使得模型的适用性更强.
- 在建立反射面板调节模型时, 统筹兼顾, 既要求反射面板尽量接近抛物面, 保证反射的效率, 又控制节点之间的距离变化不要太大, 最多不超过 0.07%. 在解决本问题的过程中, 我们还提出了多种调整算法, 对比之后得到最优的结果.
- 在接收比的计算模型中, 使用多种方法计算, 验证了结果的合理性, 同时建立了较为一般的模型, 方便进行模型的推广.

6.3 模型的缺点与改进

然而, 在数学建模的过程中, 也出现了许多难以解决的问题. 在反射面板调节模型和接收比的计算模型中, 都存在着一些不足之处.

- 在反射面板调节模型中, 由于调节的次数有限, 同时算法存在不合理之处, 最终计算的结果不一定是最优解, 调整方案还有待优化;
- 在接收比的计算模型中, 由于算力有限, 为了方便计算, 所取的点数量较少, 计算所得的接收比还不够精确.

为了得到更加准确的模型, 以下是几个改进的方向:

- 考虑下拉索及主索的受力情况, 进行力学分析及数值模拟, 得到更精细的模型, 具体见参考文献 [1];
- 探索更多的反射面板的调整方案, 例如可以基于半参数回归、神经网络和统计回归分析等, 建立更加合理的调整方案, 具体见参考文献 [2]、[3] 和 [4].

- 计算接收比时考虑让整个面板进行反射, 通过面积而非点数来计算接收比. 在这一方面的研究较少, 还有待完善.

参考文献

- [1] 路英杰, 任革学. 大射电望远镜 *FAST* 整体变形索网反射面仿真研究 [J]. 工程力学, 2007(10):165-169+159.
- [2] 段晓琳. 基于半参数回归模型的 *FAST* 节点位移预测研究 [D]. 辽宁: 东北大学, 2017.
- [3] 陈曦. 基于神经网络的 *FAST* 节点位移预测研究 [D]. 辽宁: 东北大学, 2015.
- [4] 王亚男. 基于统计回归分析理论的 *FAST* 节点位移预测研究 [D]. 辽宁: 东北大学, 2015.

附录

A 所用软件

论文使用 \LaTeX 排版, 代码使用 MATLAB 编写, 部分图片使用 PowerPoint 绘制.

B 抛物线的光学性质的证明

如图B.1所示, 平行入射的光线经过抛物线反射后, 将会汇聚到抛物线的焦点.

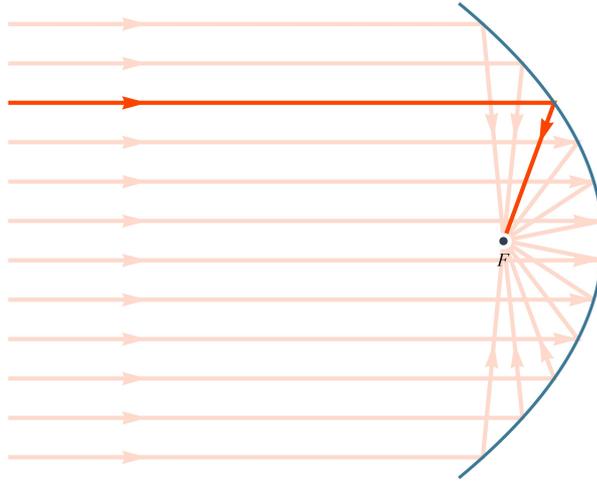


图 B.1: 抛物线的光学性质

设平面内抛物线的方程 $\Gamma : y^2 = 2px$, 其中 $p > 0$. 任取抛物线上一点 $P(2pt^2, 2pt)$, 其中 t 为参数, 则抛物线 Γ 在 P 点处的切线方程为

$$l_P : 2pty = p(x + 2pt^2).$$

因此切线斜率 $k_l = \frac{1}{2t}$, 法线斜率 $k'_l = -2t$. 又

$$k_{PF} = \frac{2pt}{2pt^2 - \frac{p}{2}} = \frac{4t}{4t^2 - 1} = \frac{2k'_l}{1 - (k'_l)^2},$$

因此平行入射的光线经过抛物线反射后, 将会汇聚到抛物线的焦点.

C 代码

C.1 数据的预处理

```

1   % 基本参数
2   R = 300.4;
3   k = 0.466;
4   alpha = 36.795/180*pi;
5   beta = 78.169/180*pi;
6   A2 = -R*[cos(beta)*cos(alpha),cos(beta)*sin(alpha),sin(beta)];
7   K = xlsread('\附件1.csv');
8   X = K(:,1)';
9   Y = K(:,2)';
10  Z = K(:,3)';
11
12  % 照明区域的确定
13  jd = zeros(1,2226);
14  for i = 1:2226
15      B2 = [X(i) Y(i) Z(i)];
16      ang = acos(abs(dot(A2,B2)/norm(A2)/norm(B2)));
17      if ang < asin(150/R)
18          jd(i) = 1;
19      end
20  end
21
22  % 相邻节点的判断与距离的计算
23  Sold = zeros(2226,2226);
24  for i = 1:2226
25      for j = 1:2226
26          Sold(i,j) = sqrt((X(i)-X(j))^2+(Y(i)-Y(j))^2+(Z(i)-Z(j))^2);
27          if Sold(i,j) > 12.37855
28              Sold(i,j) = 0;
29          end
30      end
31  end
32
33  %通过节点找到所有三角形反射面板
34  AA = [];
35  BB = [];
36  CC = [];
37  tmp = 0;
38  xh = zeros(1,2226);

```

```

39     for i = 1:2226
40         cnt = 0;
41         for j = 1:2226
42             for k = 1:2226
43                 if Sold(i,j) > 0 && Sold(j,k) > 0 && Sold(k,i) > 0
44                     tmp = tmp+1;
45                     cnt = cnt+1;
46                     AA(tmp,:) = [X(i),Y(i),Z(i)];
47                     BB(tmp,:) = [X(j),Y(j),Z(j)];
48                     CC(tmp,:) = [X(k),Y(k),Z(k)];
49                 end
50             end
51         end
52         if cnt > 0
53             xh(i) = tmp;
54         end
55     end

```

C.2 问题 1 中理想抛物面的确定与检验

```

1     % 基本参数与初始化
2     R = 300.4;
3     k = 0.466;
4     min = 1000;
5     rcd = 0;
6     ST = [];
7
8     % 计算最优焦距
9     for f = 0.464*R:0.01:0.470*R
10        st = 0;
11        for x = -150:0.1:150
12            z1 = x^2/(4*f)+(k-1)*R-f;
13            s = R-sqrt(x^2+z1^2);
14            st = st+s^2;
15        end
16        ST = [ST st];
17        if st < min

```

```

18         min = st;
19         rcd = f;
20     end
21 end
22
23 % 检验最大距离
24 f = rcd;
25 max = 0;
26 for x = -150:0.1:150
27     z1 = x^2/(4*f)+0.466*R-f;
28     s = 300.4 - sqrt(x^2+(z1-R)^2);
29     if abs(s) > max
30         max = abs(s);
31     end
32 end
33 max
34
35 % 范围与方程
36 l = f/R
37 x = -150:1:150;
38 z1 = x.^2./(4*f)+(k-l-1)*R;
39 z2 = -sqrt(R^2-x.^2);
40
41 % 画图
42 plot(x, z1, 'color', '#A2142F', 'LineWidth', 2);
43 hold on;
44 plot(x, z2, 'color', '#0072BD', 'LineWidth', 2);
45 grid on;
46 legend('理想抛物面', '基准球面');
47 xlabel('x');
48 ylabel('z');
49 xlim([-150 150]); % xlim([-10 10]);
50 axis equal;

```

C.3 问题 2 中理想抛物面的绘制

```

1 % 基本参数

```

```

2   R = 300;
3   k = 0.466;
4   l = 0.4672;
5   alpha = 36.795/180*pi;
6   beta = 78.169/180*pi;
7
8   % 范围与方程
9   [x,y,z] = meshgrid(-250:5:250, -250:5:250, ...
10      -310:5:-sqrt(300^2-250^2));
11   f1 = @(x,y,z) (cos(alpha)^2*cos(beta)^2-1).*x.^2 ...
12      + (sin(alpha)^2*cos(beta)^2-1).*y.^2 ...
13      + (sin(beta)^2-1).*z.^2 + ...
14      + 2*cos(alpha)*sin(alpha)*cos(beta)^2.*x.*y ...
15      + 2*sin(alpha)*cos(beta)*sin(beta)^2.*y.*z ...
16      + 2*cos(alpha)*cos(beta)*sin(beta)^2.*z.*x ...
17      + 4*l*R*cos(alpha)*cos(beta).*x ...
18      + 4*l*R*sin(alpha)*cos(beta).*y ...
19      + 4*l*R*sin(beta)*z ...
20      - 4*l*(k-l-1)*R^2;
21   f2 = @(x,y,z) x.^2 + y.^2 + z.^2 - 300^2;
22
23   % 画图
24   h1 = patch(isosurface(x,y,z,f1(x,y,z),0));
25   isonormals(x,y,z,f1(x,y,z),h1);
26   set(h1,'FaceColor','#A2142F','EdgeColor','none');
27   h2 = patch(isosurface(x,y,z,f2(x,y,z),0));
28   isonormals(x,y,z,f2(x,y,z),h2);
29   set(h2,'FaceColor','#0072BD','EdgeColor','none');
30
31   % 图像的调整
32   legend('工作抛物面','基准球面');
33   xlabel('x');
34   ylabel('y');
35   zlabel('z');
36   grid on;
37   view([1,1,1]);
38   axis equal;
39   camlight;
40   lighting gouraud;

```

C.4 问题 2 中的反射面板调节模型

```
1   % 基本参数
2   R = 300.4;
3   k = 0.466;
4   l = 0.4672;
5   alpha = 36.795/180*pi;
6   beta = 78.169/180*pi;
7   A2 = -300.4*[cos(beta)*cos(alpha),cos(beta)*sin(alpha),sin(beta)];
8   K = xlsread('\附件1.csv');
9   X = K(:,1);
10  Y = K(:,2);
11  Z = K(:,3);
12  X = X';
13  Y = Y';
14  Z = Z';
15  % 范围与方程
16  f1 = @(x,y,z) (cos(alpha)^2*cos(beta)^2-1).*x.^2 ...
17      + (sin(alpha)^2*cos(beta)^2-1).*y.^2 ...
18      + (sin(beta)^2-1).*z.^2 + ...
19      + 2*cos(alpha)*sin(alpha)*cos(beta)^2.*x.*y ...
20      + 2*sin(alpha)*cos(beta)*sin(beta)^2.*y.*z ...
21      + 2*cos(alpha)*cos(beta)*sin(beta)^2.*z.*x ...
22      + 4*l*R*cos(alpha)*cos(beta).*x ...
23      + 4*l*R*sin(alpha)*cos(beta).*y ...
24      + 4*l*R*sin(beta)*z ...
25      - 4*l*(k-l-1)*R^2;
26  f2 = @(x,y,z) x.^2 + y.^2 + z.^2 - 300.4^2;
27  %搜索300内的点
28  jd=zeros(1,2226);
29  for i=1:2226
30      B2=[X(i) Y(i) Z(i)];
31      ang=acos(abs(dot(A2,B2)/norm(A2)/norm(B2)));
32      if ang<asin(150/300.4)
33          jd(i)=1;
34      end
35  end
36  %计算初始全范围各点距离
```

```

37     Sold = zeros(2226,2226);
38     for i = 1:2226
39         for j = 1:2226
40             Sold(i,j) = sqrt((X(i)-X(j))^2+(Y(i)-Y(j))^2+(Z(i)-Z(j))^2);
41             if Sold(i,j) > 12.37855
42                 Sold(i,j) = 0;
43             end%找出相邻点
44         end
45     end
46     %径向伸缩
47     new = zeros(3,2226);
48     ds = zeros(1,2226);
49     for i = 1:2226
50         if jd(i)%节点在300m内
51             for k = 299.8/300.4:0.000001:301/300.4
52                 if (f1(k*X(i),k*Y(i),k*Z(i)) ≤ 0 && ...
53                     f1((k+0.000001)*X(i), (k+0.000001)*Y(i), ...
54                     (k+0.000001)*Z(i)) ≥ 0) || ...
55                     (f1(k*X(i),k*Y(i),k*Z(i)) ≥ ...
56                     0&&f1((k+0.000001)*X(i), (k+0.000001)*Y(i), ...
57                     (k+0.000001)*Z(i)) ≤ 0)
58                     new(1,i) = (k+0.0000007)*X(i);
59                     new(2,i) = (k+0.0000007)*Y(i);
60                     new(3,i) = (k+0.0000007)*Z(i);
61                     ds(i) = ...
62                         (k+0.0000007)*sqrt(X(i)^2+Y(i)^2+Z(i)^2)-300.4;
63                 elseif ...
64                     f1(301/300.4*X(i),301/300.4*Y(i),301/300.4*Z(i)) ≥ 0
65                     new(1,i) = 301/300.4*X(i);
66                     new(2,i) = 301/300.4*Y(i);
67                     new(3,i) = 301/300.4*Z(i);
68                     ds(i) = 0.6;
69                 elseif f1(299.8/300.4*X(i), 299.8/300.4*Y(i), ...
70                     299.8/300.4*Z(i)) ≤ 0
71                     new(1,i) = 299.8/300.4*X(i);
72                     new(2,i) = 299.8/300.4*Y(i);
73                     new(3,i) = 299.8/300.4*Z(i);
74                     ds(i) = -0.6;
75             end%记录新坐标和伸缩量信息

```

```

69         end
70     else
71         new(1,i)=X(i);
72         new(2,i)=Y(i);
73         new(3,i)=Z(i);
74     end
75 end
76 Snew = zeros(2226,2226);
77 differ = zeros(2226,2226);
78 record = zeros(2226,2226);
79 for h = 1:5
80     for i = 1:2226
81         for j = 1:2226
82             Snew(i,j) = sqrt((new(1,i)-new(1,j))^2 + ...
83                 (new(2,i)-new(2,j))^2 + ...
84                 (new(3,i)-new(3,j))^2);%计算全部新坐标距离
85             if Sold(i,j) == 0
86                 Snew(i,j) = 0;%保留相邻节点距离
87             elseif jd(i) && jd(j)
88                 differ(i,j) = abs(Snew(i,j)-Sold(i,j))/Sold(i,j);
89                 if differ(i,j) > 0.0007
90                     record(i,j) = 1;
91                 end
92             end
93         end
94     end
95 end
96 A = find(record==1);
97 a_1 = floor(A/2226)+1;
98 a_2 = mod(A,2226);
99 for p = 1:length(A)
100     new(1,a_1(p)) = X(a_1(p));
101     new(2,a_1(p)) = Y(a_1(p));
102     new(3,a_1(p)) = Z(a_1(p));
103     new(1,a_2(p)) = X(a_2(p));
104     new(2,a_2(p)) = Y(a_2(p));
105     new(3,a_2(p)) = Z(a_2(p));
106 end
107 for i = 1:2226
108     for j = 1:2226

```

```

106         Snew(i,j) = sqrt((new(1,i)-new(1,j))^2 + ...
            (new(2,i)-new(2,j))^2 + ...
            (new(3,i)-new(3,j))^2);%计算全部新坐标距离
107         if Sold(i,j) == 0
108             Snew(i,j) = 0;%保留相邻节点距离
109         elseif jd(i) && jd(j)
110             differ(i,j) = abs(Snew(i,j)-Sold(i,j))/Sold(i,j);
111         end
112     end
113 end
114 if max(max(differ)) < 0.0007
115     break;
116 end
117 end
118
119 M = (new(1,:) .^2 + new(2,:) .^2 + new(3,:) .^2) .^(1/2) - ...
    (X.^2+Y.^2+Z.^2) .^(1/2); %促动器位移
120 A3 = -(0.4572+0.534)*300.4*[cos(beta)*cos(alpha), ...
    cos(beta)*sin(alpha), sin(beta)]; %顶点坐标
121 N = ((new(1,:) .^2+new(2,:) .^2+new(3,:) .^2) .^(1/2) - ...
    (X.^2+Y.^2+Z.^2) .^(1/2)) .^2; %求均方根差
122 L = find(jd~=1);
123 sqature = sqrt(sum(N)/length(L));

```

C.5 问题 3 中基准球面接收比的计算

```

1     R = 300.4;
2     kk = 0.466;
3     l = 0.4672;
4     alpha = 36.795/180*pi;
5     beta = 78.169/180*pi;
6     A3=-300.4*[cos(beta)*cos(alpha),cos(beta)*sin(alpha),sin(beta)];
7     %馈源舱方程
8     kyczx=-(1-kk)*R*[cos(beta)*cos(alpha), cos(beta)*sin(alpha), ...
    sin(beta)];
9     L_in=[cos(beta)*cos(alpha),cos(beta)*sin(alpha),sin(beta)];
10    cnt=0;

```

```

11 sun=0;
12 for i=1:2226
13     for j=1:2226
14         for k=1:2226
15             if Sold(i,j)&&Sold(j,k)&&Sold(k,i)&&jd(i)&&jd(j)&&jd(k)
16                 % sun=sun+1;
17                 ctr=[X(i)+X(j)+X(k),Y(i)+Y(j)+Y(k),Z(i)+Z(j)+Z(k)]/3;
18                 ctr_2=[ctr(1)+X(i),ctr(2)+Y(i),ctr(3)+Z(i)]/2;
19                 ctr_3=[ctr(1)+X(j),ctr(2)+Y(j),ctr(3)+Z(j)]/2;
20                 ctr_4=[ctr(1)+X(k),ctr(2)+Y(k),ctr(3)+Z(k)]/2;
21                 ctr_5=[ctr_2(1)+ctr_3(1),ctr_2(2)+ctr_3(2),...
22                     ctr_2(3)+ctr_3(3)]/2;
23                 ctr_6=[ctr_4(1)+ctr_3(1),ctr_4(2)+ctr_3(2),...
24                     ctr_4(3)+ctr_3(3)]/2;
25                 ctr_7=[ctr_2(1)+ctr_4(1),ctr_2(2)+ctr_4(2),...
26                     ctr_2(3)+ctr_4(3)]/2;
27                 x11=[X(i)-X(j),Y(i)-Y(j),Z(i)-Z(j)];
28                 x12=[X(k)-X(j),Y(k)-Y(j),Z(k)-Z(j)];
29                 X1=[X(i),Y(i),Z(i)];
30                 X2=[X(j),Y(j),Z(j)];
31                 X3=[X(k),Y(k),Z(k)];
32                 % ctr=[new(1,i)+new(1,j)+new(1,k),...
33                     new(2,i)+new(2,j)+new(2,k),new(3,i)+new(3,j)+new(3,k)]/3;
34                 % ...
35                 ctr_2=[ctr(1)+new(1,i),ctr(2)+new(2,i),ctr(3)+new(3,i)]/2;
36                 % ...
37                 ctr_3=[ctr(1)+new(1,j),ctr(2)+new(2,j),ctr(3)+new(3,j)]/2;
38                 % ...
39                 ctr_4=[ctr(1)+new(1,k),ctr(2)+new(2,k),ctr(3)+new(3,k)]/2;
40                 % X1=[new(1,i),new(2,i),new(3,i)];
41                 % X2=[new(1,j),new(2,j),new(3,j)];
42                 % X3=[new(1,k),new(2,k),new(3,k)];
43                 % ...
44                 ctr_5=[ctr_2(1)+ctr_3(1),ctr_2(2)+ctr_3(2),ctr_2(3)+ctr_3(3)]/2;
45                 % ...
46                 ctr_6=[ctr_4(1)+ctr_3(1),ctr_4(2)+ctr_3(2),ctr_4(3)+ctr_3(3)]/2;
47                 % ...
48                 ctr_7=[ctr_2(1)+ctr_4(1),ctr_2(2)+ctr_4(2),ctr_2(3)+ctr_4(3)]/2;
49                 % ...

```

```

40     x11=[new(1,i)-new(1,j),new(2,i)-new(2,j),new(3,i)-new(3,j)];
41     %
42     %
43     x12=[new(1,k)-new(1,j),new(2,k)-new(2,j),new(3,k)-new(3,j)];
44     n=cross(x11,x12);
45     if (dot(L_in,n)/norm(L_in)/norm(n))>0
46         angX=acos((dot(L_in,n)/norm(L_in)/norm(n)));
47     else
48         angX=acos(abs(dot(L_in,n)/norm(L_in)/norm(n)));
49         n=-n;
50     end
51     %反射光线
52     gzxb=L_in*norm(n)/norm(L_in)/cos(angX); ...
53     %构造向量三角形的斜边(平行入射光线)
54     fsx1=2*n-gzxb;
55     fsx1=fsx1/norm(fsx1);
56     %几何+解析求反射光线与馈源舱平面交点
57     cnt_2=0;
58     for i_1=0:0.25:1
59         for j_1=0:0.001:1-i_1
60             sun=sun+1;
61             k_1=1-i_1-j_1;
62             Q=i_1*X1+j_1*X2+k_1*X3;
63             A=dot(L_in,kyczx-Q);
64             Djdzx=norm(A*L_in/(norm(L_in)^2)) / ...
65                 (2*(cos(angX))^2-1);
66             fsjd=Q+Djdzx*fsx1;%反射光线与馈源舱平面交点
67             if norm(fsjd-kyczx)<=0.5
68                 cnt=cnt+1;
69             end
70         end
71     end
72     end
73     if cnt_2>=1
74         cnt=cnt+1;
75     end
76     end
77     cnt/sun

```

C.6 问题 3 中工作抛物面接收比的计算

```
1      %计算三角面板为球面时接收比
2      R = 300.4;
3      kk = 0.466;
4      alpha = 36.795/180*pi;
5      beta = 78.169/180*pi;
6      A3=-300.4*[cos(beta)*cos(alpha),cos(beta)*sin(alpha),sin(beta)];
7      %馈源舱方程
8      kyczx=-(1-kk)*R*[cos(beta)*cos(alpha), cos(beta)*sin(alpha), ...
9          sin(beta)];
10     L_in=[cos(beta)*cos(alpha),cos(beta)*sin(alpha),sin(beta)];
11     cnt=0;
12     sun=0;
13     for i=1:2226
14         for j=1:2226
15             for k=1:2226
16                 if Soid(i,j)&&Soid(j,k)&&Soid(k,i)&&jd(i)&&jd(j)&&jd(k)
17                     X11=[X(i),Y(i),Z(i)];
18                     X12=[X(j),Y(j),Z(j)];
19                     X13=[X(k),Y(k),Z(k)];
20                     X21=[new(1,i),new(2,i),new(3,i)];
21                     X22=[new(1,j),new(2,j),new(3,j)];
22                     X33=[new(1,k),new(2,k),new(3,k)];
23                     x11=[X(i)-X(j),Y(i)-Y(j),Z(i)-Z(j)];
24                     x12=[X(k)-X(j),Y(k)-Y(j),Z(k)-Z(j)];
25                     x21=[new(1,i)-new(1,j), new(2,i)-new(2,j), ...
26                         new(3,i)-new(3,j)];
27                     x22=[new(1,k)-new(1,j), new(2,k)-new(2,j), ...
28                         new(3,k)-new(3,j)];
29                     n1=cross(x11,x12)/norm(cross(x11,x12));
30                     n2=cross(x21,x22)/norm(cross(x21,x22));
31                     %求旋转矩阵:
32                     va1=n1;va2=cross(n1,[1,0,0]);va3=cross(va1,va2);
33                     vb1=n2;vb2=cross(n2,[1,0,0]);vb3=cross(vb1,vb2);
34                     Rot=[vb1',vb2',vb3']*inv([va1',va2',va3']);
35                     %解析几何求反射光线与馈源舱平面交点
36                     %求球面上一点
```

```

34     for i_1=0:0.02:1
35         for j_1=0:0.001:1-i_1
36             k_1=1-i_1-j_1;
37             sun=sun+1;
38             D=i_1*[X(i),Y(i),Z(i)] + j_1*[X(j),Y(j),Z(j)] ...
                 + k_1*[X(k),Y(k),Z(k)];
39             Dnew=i_1*[new(1,i),new(2,i),new(3,i)] + ...
                 j_1*[new(1,j),new(2,j),new(3,j)] + ...
                 k_1*[new(1,k),new(2,k),new(3,k)];
40             Q=zeros(1,3);
41             Q=i_1*[X(i) Y(i) 0]+j_1*[X(j) Y(j) ...
                 0]+k_1*[X(k) Y(k) 0]+Q;
42             Z_Q=-sqrt(R^2-norm(Q)^2);
43             Q(3)=Z_Q;a=Q-D;
44             b=Rot*a'; b=b';
45             Qnew=Dnew+b;
46             n_q1=Q; n_q2=Rot*n_q1'; n_q2=n_q2';
47             if (dot(L_in,n_q2)/norm(L_in)/norm(n_q2))>0
48                 angX = acos((dot(L_in,n_q2)/norm(L_in) / ...
                               norm(n_q2)));
49             else
50                 angX = acos(abs(dot(L_in,n_q2)/norm(L_in) ...
                               / norm(n_q2)));
51                 n_q2=-n_q2;
52             end
53             %反射光线
54             gzxb = L_in*norm(n_q2)/norm(L_in)/cos(angX); ...
                 %构造向量三角形的斜边（平行入射光线）
55             fsx1=2*n_q2-gzxb;
56             fsx1=fsx1/norm(fsx1);
57             A=dot(L_in,kyczx-Qnew);
58             Djdzx = norm(A*L_in/(norm(L_in)^2)) ...
                 /(2*(cos(angX))^2-1);
59             fsjd=Qnew+Djdzx*fsx1;%反射光线与馈源舱平面交点
60             if norm(fsjd - kyczx)≤0.5
61                 cnt=cnt+1;
62             end
63         end
64     end

```

```
65         end
66     end
67 end
68 end
69 cnt/sun
```