正态分布简介

统计 91 董晟渤

2021 年 6 月 28 日

目录

1 一维正态分布

1.1 基本性质

设 $a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, 令

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

则以 $p(x)$ 为密度函数的随机变量 X 服从以 a 和 σ^2 为参数的**正态分布**, 记作 $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$. 特别地, $\mathcal{N}(0,1)$ 称为**标准正态分布**. 标准正态分布的分布函数记为

$$\varPhi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \mathrm{d}t.$$

首先, 我们需要验证上面的密度函数 $p(x)$ 是一个密度函数.

命题 1.1 (正规性)**.** *设 $a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, 则*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1.$$

证明. 令 $t = \dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}$, 则 $\mathrm{d}x = \dfrac{\sigma \mathrm{d}t}{\sqrt{2t}}$, 计算得

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

其中

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{0}^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

□

其次, 我们指出上面的参数 a 和 σ^2 的含义.

命题 1.2 (期望与方差)**.** 设 $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, 则 $\mathbb{E}X = a, \mathrm{Var}X = \sigma^2$.

证明. 首先, 计算得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-a)+a}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}x \\
&= a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}x \\
&= a.
\end{aligned}$$

其次, 令 $t = \dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}$, 则 $\mathrm{d}x = \dfrac{\sigma \mathrm{d}t}{\sqrt{2t}}$, 计算得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}X &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-a)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{a}^{+\infty} \frac{(x-a)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \sigma^2,
\end{aligned}$$

其中

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$\square$

最为特殊的正态分布是标准正态分布 $\mathcal{N}(0,1)$. 事实上, 我们可以将任意一个服从正态分布的随机变量进行标准化, 得到标准正态分布.

命题 1.3 (标准化)**.** 设 $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, 则 $Y = \dfrac{X-a}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

证明. 此时

$$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

并且 $X = \sigma Y + a$, 从而

$$P_Y(x) = \sigma \cdot P_X(\sigma x + a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\},$$

也即 $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. □

对于标准正态分布 $\mathcal{N}(0,1)$, 利用 Gamma 函数可以计算矩. 这些结果在后面非常有用.

命题 1.4 (矩)**.** 设 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}X^{2n-1} = 0, \\
&\mathbb{E}|X|^{2n-1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2n-2)!!, \\
&\mathbb{E}X^{2n} = \mathbb{E}|X|^{2n} = (2n-1)!!.
\end{aligned}$$

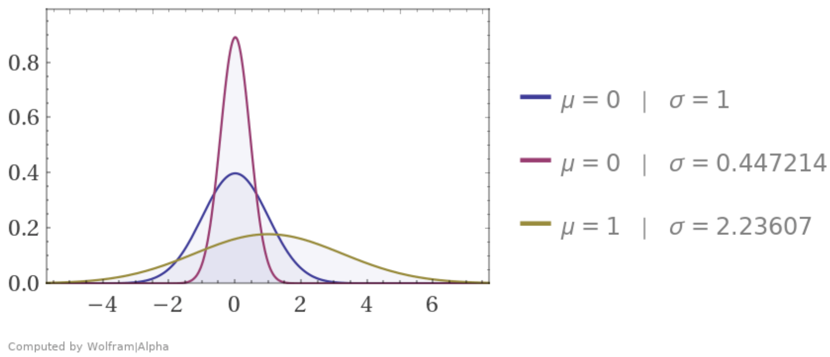

图 1: 正态分布示意图

1.2 特征函数

特征函数是研究随机变量的有力工具, 在此计算正态分布的特征函数, 并且借助计算的结果, 进一步研究正态分布.

命题 1.5 (特征函数)**.** 正态分布 $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ 的特征函数

$$f(t) = \exp\left\{iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}.$$

特别地, 标准正态分布 $\mathcal{N}(0,1)$ 的特征函数

$$f(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}.$$

证明. 首先设 $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, 计算得

$$\begin{aligned} f_Y(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}X^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2n-1)!! \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{t^2}{2}\right)^n \\ &= \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}. \end{aligned}$$

其次设 $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, 令 $Y = \dfrac{X-a}{\sigma}$, 则 $X = \sigma Y + a$, 计算得

$$\begin{aligned} f_X(t) &= \mathrm{e}^{ita} f_Y(\sigma t) \\ &= \exp\left\{iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}. \end{aligned}$$

□

命题 1.6 (再生性)**.** 设 $X_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2), X_2 \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2)$, 且 X_1 与 X_2 相互独立, 则 $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

证明. 此时

$$\begin{aligned} f_{X_1}(t) &= \exp\left\{ia_1 t - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2\right\}, \\ f_{X_2}(t) &= \exp\left\{ia_2 t - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2\right\}, \end{aligned}$$

计算得

$$\begin{aligned} f_{X_1+X_2} &= f_{X_1}(t)f_{X_2}(t) \\ &= \exp\left\{i(a_1+a_2)t - \frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2\right\} \end{aligned}$$

为 $\mathcal{N}(a_1+a_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ 的特征函数, 因此 $X_1+X_2 \sim \mathcal{N}(a_1+a_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$. □

命题 1.7. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且 $X_k \sim \mathcal{N}(a_k, \sigma_k^2)$, 其中 $1 \le k \le n$, 则 $X_1+X_2+\cdots+X_n \sim \mathcal{N}(a_1+a_2+\cdots+a_n, \sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2)$.

一维正态分布的一个重要应用就是中心极限定理.

定理 1.8 (Levy 中心极限定理)**.** 设 $\{X, X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $X \in L_2, \mathbb{E}X = a, 0 < \mathrm{Var}X = \sigma^2 < +\infty$, 则

$$\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

证明. 记 $f_n(t) = \mathbb{E}\exp\left\{it\frac{S_n-na}{\sqrt{n}\sigma}\right\}$, 计算得

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \mathbb{E}\exp\left\{it\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k-a}{\sqrt{n}\sigma}\right\} \\ &= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\exp\left\{it\frac{X_k-a}{\sqrt{n}\sigma}\right\} \\ &= \left(\mathbb{E}\exp\left\{it\frac{X-a}{\sqrt{n}\sigma}\right\}\right)^n \\ &= \left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \\ &\to \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \end{aligned}$$

因此

$$\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

□

2 二维正态分布

2.1 基本性质

设 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0, |r| < 1$, 令

$$\begin{aligned}p(x,y) = &\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \\ &\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},\end{aligned}$$

则以 $p(x,y)$ 为密度函数的随机向量 (X,Y) 服从**二维正态分布** $\mathcal{N}(a_1, a_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; r)$.

在这里的计算相对麻烦, 从而我们只给出结果, 而省略复杂的计算.

命题 2.1 (边缘分布)**.** *设* $(X,Y) \sim \mathcal{N}(a_1, a_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; r)$, *则* $X \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2), Y \sim N(a_2, \sigma_2^2)$.

证明. 计算得

$$\begin{aligned}p_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\},\end{aligned}$$

因此 $X \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2)$, 同理 $Y \sim N(a_2, \sigma_2^2)$. □

命题 2.2 (正规性)**.** *设* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0, |r| < 1$, *则*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

证明. 计算得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\mathrm{d}x \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

其次, 我们来说明参数 r 的含义.

命题 2.3 (相关系数)**.** *设 $(X,Y)\sim\mathcal{N}(a_1,a_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;r)$, 则 $r_{X,Y}=r$.*

证明. 首先, 计算得

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\{X,Y\}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a_1)(y-a_2)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=r\sigma_1\sigma_2,\end{aligned}$$

从而

$$r_{X,Y}=\frac{\mathrm{Cov}\{X,Y\}}{\sigma_1\sigma_2}=r.$$

□

命题 2.4 (独立与相关)**.** *设 $(X,Y)\sim\mathcal{N}(a_1,a_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;r)$, 则下面三个命题等价.*
(1) X 与 Y 相互独立; (2) X 与 Y 不相关; (3) $r=0$.

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2): X 与 Y 相互独立, 则 X 与 Y 一定不相关;
(2) $\Longrightarrow$ (3): X 与 Y 不相关, 则 $r_{X,Y}=r=0$;
(3) $\Longrightarrow$ (1): 若 $r=0$, 则

$$\begin{aligned}p(x,y)&=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}\\&=p_X(x)p_Y(x),\end{aligned}$$

从而 X 与 Y 相互独立. □

2.2 简化表示

注意到, 此时密度函数中 e 的指数

$$-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

为关于 $(x-a_1)$ 和 $(y-a_2)$ 的二次型. 记矩阵

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1}{1-r^2}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sigma_1^2} & -\dfrac{r}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\dfrac{r}{\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix},$$

并且注意到

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

为随机变量 $(X,Y)^T$ 的协方差阵, 其中

$$|\boldsymbol{B}| = (1-r^2)\sigma_1^2\sigma_2^2.$$

再记 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^T$, 从而二维正态分布的密度函数可以简化表示为

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}^T)\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right\}.$$

在将来, 我们也可以将多维正态分布写成这样的形式.

3 多维正态分布

3.1 基本性质

设 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为正定矩阵, 令

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right\},$$

则以 $p(\boldsymbol{x})$ 为密度函数的随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n **维正态分布** $\mathcal{N}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{B})$. 特别地, $\mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$ 称为**标准** n **维正态分布**.

命题 3.1 (标准化)**.** *设 $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{B})$, 且存在可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$, 记*

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a}),$$

则 $\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$.

证明. 记 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$, 则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a}$, Jacobi 矩阵为 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{2}}$, 代入计算得

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) &= |\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{2}} \cdot p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}\right\}, \end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$. □

命题 3.2 (特征函数)**.** *n 维正态分布 $\mathcal{N}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{B})$ 的特征函数*

$$f(\boldsymbol{t}) = \exp\left\{i\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{t} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{t}\right\}.$$

特别地, 标准 n 维正态分布 $\mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$ 的特征函数

$$f(\boldsymbol{t}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{t}\right\}.$$

证明. 首先设 $\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})$, 计算得

$$\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{t})&=\mathbb{E}\exp\{i\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{Y}\}\\
&=\prod_{k=1}^n\mathbb{E}\exp\{it_kY_k\}\\
&=\prod_{k=1}^n\exp\left\{-\frac{1}{2}t_k^2\right\}\\
&=\exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{t}\right\}.
\end{aligned}$$

其次设 $\boldsymbol{X}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$, 且存在可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$, 令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a})$, 则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{a}$, 计算得

$$\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})&=\mathbb{E}\exp\{i\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{X}\}\\
&=\mathbb{E}\exp\{i\boldsymbol{t}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{a})\}\\
&=\exp\{it\boldsymbol{a}\}\cdot\mathbb{E}\exp\{i(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{t})^T\boldsymbol{Y}\}\\
&=\exp\{it\boldsymbol{a}\}\cdot f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{t})\\
&=\exp\left\{i\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{t}-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{t}\right\}.
\end{aligned}$$

□

特征函数有利于我们进行接下来的讨论.

命题 3.3 (独立与相关)**.** *设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$, 则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立当且仅当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 两两不相关.*

证明. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 则它们一定两两不相关.

反之, 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 两两不相关, 则有

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{t})&=\exp\left\{i\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{t}-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{t}\right\}\\
&=\prod_{k=1}^n\exp\left\{ia_kt_k-\frac{1}{2}b_{kk}t_k^2\right\}\\
&=\prod_{k=1}^n f_k(t_k),
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_n)^T$, $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$, $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}\{b_{11},b_{22},\cdots,b_{nn}\}$, 因此它们相互独立. □

命题 3.4 (边缘分布与条件分布)**.** n 维正态分布的任一 $k(1\le k<n)$ 维边缘分布是 k 维正态分布. 同时 n 维正态分布的各种形式的条件分布也是正态分布.

证明. 写出对应的特征函数即可. □

3.2 随机变量的变换

命题 3.5 (线性变换)**.** 设 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n},\boldsymbol{X}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$, 令

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X},\quad \boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{m\times n},$$

则 $\boldsymbol{Y}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{a},\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T)$.

证明. 设 $\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^m$, 则

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{s}) &= \mathbb{E}\exp\{i\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{Y}\} \\ &= \mathbb{E}\exp\{i\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}\} \\ &= f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{s}) \\ &= \exp\left\{i(\boldsymbol{C}\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{s}-\frac{1}{2}\boldsymbol{s}^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T)\boldsymbol{s}\right\}, \end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{Y}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{a},\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T)$. □

命题 3.6 (正交变换)**.** 设 $\boldsymbol{X}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$ 的各个分量相互独立.

证明. 对任意的正定矩阵 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 都存在正交矩阵 $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使得 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T$ 为对角矩阵. □

命题 3.7 (判定法则)**.** $\boldsymbol{X}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$, 当且仅当对任意的 $\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^n$, 都有 $Y=\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{X}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{a},\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{s})$.

证明. 若 $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{B})$, 则 $Y \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{a}, \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{s})$.

反之, 若对任意的 $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$, $Y = \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{a}, \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{s})$, 则

$$\begin{aligned} f_Y(t) &= \mathbb{E}\exp\{itY\} \\ &= \mathbb{E}\exp\{it\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{X}\} \\ &= \exp\left\{i(\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{a})t - \frac{1}{2}(\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{s})t^2\right\}, \end{aligned}$$

令 $t = 1$, 即可得

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{s}) &= \mathbb{E}\exp\{i\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{X}\} \\ &= \exp\left\{i\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{s}\right\}, \end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{B})$. $\square$