随机变量渐进分析

统计 91 董晟渤

2021 年 11 月 29 日

目录

1 收敛模式

设 $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ 为概率空间.

1.1 几乎必然收敛

设 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 和 X 是概率空间 $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ 上的随机变量. 若

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to+\infty} X_n \neq X\right\} = 0, \quad \text{或} \quad \mathbb{P}\left\{\lim_{n\to+\infty} X_n = X\right\} = 1,$$

则称 $\{X_n\}$ **几乎必然以 X 为极限**, 记为 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$; 若 Xa.s. 有限且 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, 则称 $\{X_n\}$ **几乎必然收敛于 X**.

命题 1.1 (等价命题)**.** $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ 当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\mathbb{P}\left\{\bigcap_{m=1}^{+\infty}\bigcup_{n=m}^{+\infty}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}\right\} = 0, \quad \text{或} \quad \mathbb{P}\left\{\bigcup_{m=1}^{+\infty}\bigcap_{n=m}^{+\infty}\{|X_n - X| < \varepsilon\}\right\} = 1.$$

1.2 几乎一致收敛

设 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 和 X 是概率空间 $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ 上的随机变量. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $A \in \mathscr{F}$, 使得 $\mathbb{P}\{A\} < \varepsilon$ 且

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\omega\notin A} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0,$$

则称 $\{X_n\}$ 几乎一致收敛于 X, 记为 $X_n \xrightarrow{\text{a.u.}} X$.

命题 1.2 (等价命题)**.** $X_n \xrightarrow{\text{a.u.}} X$ 当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}\left\{\bigcup_{n=m}^{+\infty}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}\right\} = 0.$$

根据 $\mathbb{P}\{\Omega\} = 1$, 可得如下命题.

命题 1.3 (蕴含关系)**.** $X_n \xrightarrow{\text{a.u.}} X$ 当且仅当 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$.

1.3 平均收敛

设 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 和 X 是概率空间 $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ 上的随机变量, 且 $X_n, X \in L_r$, 其中 $r > 0$, 若

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}|X_n - X|^r = 0,$$

则称 $\{X_n\}$ 依 r 阶平均收敛于 X, 记为 $X_n \xrightarrow{L_r} X$.

1.4 依概率收敛

设 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 和 X 是概率空间 $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ 上的随机变量. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 都有

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0,$$

则称 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 X, 记为 $X_n \xrightarrow{p} X$.

命题 1.4 (等价命题)**.** *$X_n \xrightarrow{p} X$ 当且仅当对 $\{X_n\}$ 的任一子列, 存在该子列的子列 $\{X_{n'}\}$, 使 $X_{n'} \xrightarrow{\text{a.u.}} X$.*

命题 1.5 (蕴含关系)**.** *若 $X_n \xrightarrow{\text{a.u.}} X$ 或 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, 则 $X_n \xrightarrow{p} X$.*

命题 1.6 (蕴含关系)**.** *若 $X_n \xrightarrow{L_r}$, 则 $X_n \xrightarrow{p} X$.*

1.5 特征函数

设 X 是概率空间 $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ 上的随机变量, 则

$$f(t) = \mathbb{E}\mathrm{e}^{itX}$$

称为 X 的特征函数.

命题 1.7 (性质)**.** *设 $f(t)$ 是随机变量 X 的特征函数.*

- *$f(0) = 1$;*

- $f|(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$;
- $f(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

命题 1.8 (Taylor 展开式)**.** 设 $f(t)$ 是随机变量 X 的特征函数, $X \in L_n$, 则

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}X^k + o(t^n), \quad t \to 0.$$

命题 1.9 (反演公式)**.** 设 $f(t)$ 是分布函数 F 的特征函数, 则

$$\bar{F}(b) - \bar{F}(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-itb} - \mathrm{e}^{-ita}}{-it} f(t) \mathrm{d}t,$$

其中 $\bar{F}(x) = \dfrac{F(x) + F(x-0)}{2}$.

设 X 是连续型随机变量, 密度函数为 $p(x)$, 特征函数为 $f(t)$, 则

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx} f(t) \mathrm{d}t.$$

1.6 依分布收敛

设 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 和 X 是概率空间 $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ 上的随机变量. 对应的分布函数分别为 $\{F_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 和 F, 若

$$F_n(x) \to F(x), \quad \text{对任意的 } F(x) \text{ 的连续点 } x,$$

则称 $\{F_n\}$ 弱收敛到 F, 记为 $F_n \xrightarrow{w} F$; 称 $\{X_n\}$ 依分布收敛于 X, 记为 $X_n \xrightarrow{d} X$.

命题 1.10 (连续性定理)**.** 设 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 和 X 对应的特征函数分别为 $\{f_n(t), n = 1, 2, \cdots\}$ 和 $f(t)$, 则 $X_n \xrightarrow{d} X$ 当且仅当

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(t) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

命题 1.11 (蕴含关系)**.** 若 $X_n \xrightarrow{p} X$, 则 $X_n \xrightarrow{d} X$.

命题 1.12 (蕴含关系)**.** $X_n \xrightarrow{p} c$ 当且仅当 $X_n \xrightarrow{d} c$.

命题 1.13 (Slutsky 引理)**.** 若 $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{p} 0, W_n \xrightarrow{p} 1$, 则

$$W_n X_n + Y_n \xrightarrow{p} X.$$

2 重要结论

2.1 常用不等式

定理 2.1 (C_r 不等式)**.** 设 $r>0$, 定义

$$C_r=\begin{cases}2^{r-1}, & r\geq 1,\\ 1, & 0<r<1,\end{cases}$$

随机变量 $X_1,X_2\in L_r$, 则有

$$\mathbb{E}|X_1+X_2|^r\leq C_r(\mathbb{E}|X_1|^r+\mathbb{E}|X_2|^r).$$

定理 2.2 (Chebyshev 不等式)**.** 设 X 是概率空间 $\{\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}\}$ 上的随机变量, $g:[0,+\infty)\to[0,\infty)$ 单调递增, 若 $g(|X|)\in L_1$, 则对任意的 $a>0$, $g(a)>0$, 都有

$$\mathbb{P}\{|X|\geq a\}\leq\frac{\mathbb{E}g(|X|)}{g(a)}.$$

若 $X\in L_r$, 取 $g(x)=x^r$ 得

$$\mathbb{P}\{|X|\geq x\}\leq\frac{\mathbb{E}|X|^r}{x^r},\quad\forall x>0;$$

取 $r=2$ 得

$$\mathbb{P}\{|X-\mathbb{E}X|\geq x\}\leq\frac{\mathrm{Var}X}{x^2}.$$

定理 2.3 (Kolmogorov 不等式)**.** 设 $\{X_n\}$ 是独立随机变量序列, 且 $\mathbb{E}X_n=0,\mathbb{E}X_n^2<+\infty$, $|X_n|\leq c<+\infty,n=1,2,\cdots$, 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^n X_k$, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 都有

$$1-\frac{(\varepsilon+c)^2}{\sum\limits_{k=1}^n\mathbb{E}X_k^2}\leq\mathbb{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n}|S_k|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^n\mathbb{E}X_k^2.$$

2.2 积分的收敛

定理 2.4 (Levi 单调收敛定理). 设 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 和 X 非负, $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, 若 $X_n \le X_{n+1}, n=1,2,\cdots$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X.$$

定理 2.5 (Lebesgue 控制收敛定理). 设 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ 或 $X_n \xrightarrow{p} X$, 若存在随机变量 Y, 使得 $|X_n| \le Y, \text{a.s.}, n=1,2,\cdots$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X.$$

定理 2.6 (Lebesgue 有界收敛定理). 设 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ 或 $X_n \xrightarrow{p} X$, 若存在 $M>0$ 使得 $|X_n| \le M, \text{a.s.}, n=1,2,\cdots$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X.$$

2.3 级数的收敛

定理 2.7 (Kronecker 引理). 设 $\{x_n : n=1,2,\cdots\}$ 为实数列, $\{b_n, n=1,2,\cdots\}$ 为正数列, 且 $b_n \uparrow +\infty$, 则当级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{b_n}$ 收敛时, 有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0.$$

设 $\{A_n\}$ 是概率空间 $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ 中的事件类, 记

$$\{A_n, \text{i.o.}\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n,$$

其表示 $\{A_n\}$ 中有无穷多个事件发生.

定理 2.8 (Borel-Cantelli 引理). 对于事件列 $\{A_n\}$,

- 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{A_n\} < +\infty$, 则 $\mathbb{P}\{A_n, \text{i.o.}\} = 0$;

- 若 $\{A_n\}$ 相互独立, $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\{A_n\}=\infty$, 则则 $\mathbb{P}\{A_n,\text{i.o.}\}=1$.

定理 2.9 (Kolmogorov 三级数定理)**.** 设 $\{X_n\}$ 是独立随机变量序列, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}X_n$a.s. 收敛的必要条件是对任意的 $C>0$, 都有

$$\begin{cases}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\{|X_n|>C\}<+\infty,\\ \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}X_nI_{\{|X_n|\leq C\}}\text{收敛},\\ \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Var}X_nI_{\{|X_n|\leq C\}}<+\infty.\end{cases}$$

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}X_n$a.s. 收敛的充分条件是存在 $C>0$, 使得上面三式成立.

3 大数律与中心极限定理

3.1 弱大数律

设 $\{X_n\}$ 是概率空间 $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ 上的随机变量, 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, 若存在实数序列 $\{a_n, n = 1, 2, \cdots\}$, 正数序列 $\{b_n, n = 1, 2, \cdots\}$, 使得

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{p} 0,$$

则称 $\{X_n\}$ 服从弱大数律, 其中 $\{a_n\}$ 称为中心化数列, $\{b_n\}$ 称为正则化数列. 若 $X_n \in L_1, n = 1, 2, \cdots$, 则通常取 $a_n = \mathbb{E}S_n, b_n = n, n = 1, 2, \cdots$.

借助 Chebyshev 不等式可以得到如下结论.

定理 3.1 (Markov 弱大数律)**.** *若* $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Var}S_n}{n^2} = 0$, *则有*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow{p} 0.$$

定理 3.2 (Chebyshev 弱大数律)**.** *若* $\{X_n\}$ *两两独立, 且存在* $C > 0$, *使得* $\mathrm{Var}X_n \le C$, *则有*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow{p} 0.$$

用 i.i.d. 表示独立同分布, 独立同分布的序列通常有较好的性质. 并且, 注意到 0 为退化为常数的随机变量, 因此 $\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{p} 0$ 当且仅当 $\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} 0$, 从而只需验证

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\exp\left\{it\frac{S_n - a_n}{b_n}\right\} = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

定理 3.3 (Khinchin 弱大数律)**.** *若* $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$i.i.d., *且* $X_n \in L_1, \mathbb{E}X_n = a, n = 1, 2, \cdots$, *则有*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} a.$$

3.2 强大数律

设 $\{X_n\}$ 是概率空间 $\{\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}\}$ 上的随机变量, 记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$, 若存在实数序列 $\{a_n,n=1,2,\cdots\}$, 正数序列 $\{b_n,n=1,2,\cdots\}$, 使得

$$\frac{S_n-a_n}{b_n}\to 0,\quad \text{a.s.},$$

则称 $\{X_n\}$ 服从强大数律, 其中 $\{a_n\}$ 称为中心化数列, $\{b_n\}$ 称为正则化数列. 强大数律与弱大数律相比, 收敛模式有所不同.

定理 3.4 (Kolmogorov 强大数律)**.** *若 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$i.i.d., 则*

$$\frac{S_n}{n}\to a,\quad \text{a.s.}$$

当且仅当 $X_n\in L_1,\mathbb{E}X_n=a,n=1,2,\cdots$.

定理 3.5 (Marcinkiewicz 强大数律)**.** *若 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$i.i.d., 则*

$$\frac{S_n-na}{n^{\frac{1}{r}}}\to 0,\quad \text{a.s.}$$

当且仅当 $X_n\in L_r,n=1,2,\cdots$, 且

$$a=\begin{cases}\mathbb{E}X_n, & 1\le r<2,\\ \text{任意实数}, & 0<r<1.\end{cases}$$

3.3 中心极限定理

设 $\{X_n\}$ 是概率空间 $\{\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}\}$ 上的随机变量, 记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$, 若存在实数序列 $\{a_n,n=1,2,\cdots\}$, 正数序列 $\{b_n,n=1,2,\cdots\}$, 使得

$$\frac{S_n-a_n}{b_n}\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1),$$

则称 $\{X_n\}$ 服从中心极限定理或称 S_n 具有渐近正态性. 其中 $\{a_n\}$ 称为中心化数列, $\{b_n\}$ 称为正则化数列.

由连续性定理, 只需验证

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\exp\left\{\frac{S_n-a_n}{b_n}\right\}=\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\},\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

定理 3.6 (Levy 中心极限定理)**.** 若 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$i.i.d., $X_n \in L_2, \mathbb{E}X = a, 0 < \mathrm{Var}X_n = \sigma^2 < +\infty, n = 1,2,\cdots$, 则有

$$\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

而如果考虑独立不同分布的情况, 将会更加复杂. 通常记

$$\mathbb{E}X_n = a_n, \quad \mathrm{Var}X_n = \sigma_n^2,$$

再记

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad B_n^2 = \mathrm{Var}S_n = \sum_{k=1}^n \sigma_n^2.$$

定理 3.7 (Lindeberg 中心极限定理)**.** 若 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 独立, 且对任意的 $\tau > 0$, 都有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left\{(X_k - a)^2 I(|X_k - a| \geq \tau B_n)\right\} = 0, \tag{1}$$

则有

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{B_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

其中 (1) 被称为 Lindeberg 条件, 其验证起来较为困难.

命题 3.8 (Lindeberg 条件的必要条件)**.** 若 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 独立, 且满足 *Lindeberg* 条件, 则

- $\max\limits_{1\leq k\leq n} \left|\frac{X_k - a_k}{B_k}\right| \xrightarrow{p} 0$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \max\limits_{1\leq k\leq n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} = 0$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = +\infty$.

以下是两个更容易验证的结果.

定理 3.9. 若 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 独立, 且存在常数列 $\{L_n, n \in \mathcal{N}\}$, 使得

$$\max_{1\le k\le n} |X_k| \le L_n, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{L_n}{B_n} = 0,$$

则有

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{B_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

定理 3.10 (Lyapunov 中心极限定理)**.** 若 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 独立, 且存在 $\delta > 0$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k - a_k|^{2+\delta} = 0, \tag{2}$$

则有

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{B_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

其中 (2) 被称为 Lyapunov 条件.